EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

53e jaargang
1977/1978
no 4
december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 21,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 32,–. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 18,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.

Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Tweedegraadsfunkties kinderspel

KEES VAN BAALEN

Dans, mime, toneel, talen, zijn hoofdvakken op mijn IVKO-school (indiv. voortgez. kunstzinnig ond.). Wiskunde is daar een bijvak. Een uitrustuurtje, zoals muziek of maatschappijleer op gewone scholen. Omdat er ook geen programma of examen is, heb ik het geluk me iedere dag te mogen afvragen: 'Wat moeten kinderen eigenlijk leren? Wat vinden ze leuk? Hoe moet ik het aanpakken?' En soms zelfs: 'Wat is wiskunde?'

Ze maken snoep en berekenen hoeveel het kost. Ze gaan in mijn lesuur zwemmen en meten hoe hard ze gaan, hoe diep ze duiken en hoe lang ze onder water kunnen blijven. Ze hebben maten en prijzen van kleren bekeken. Ze hebben het verschijnsel 'verkering' gekwantificeerd. Allemaal wiskundige operaties volgens mij. Maar zij zijn daar niet zo zeker van, omdat ik hen niet dezelfde kwellingen laat ondergaan als waarvan hun vriendjes op andere scholen vertellen of hun ouders zich van vroeger herinneren. Daarom haal ik af en toe iets van stal dat ook in hun ogen lijkt op wiskunde.

Bijvoorbeeld een tafelblad wordt met mm-papier beprikt en een beetje schuin gezet. Een stalen kogel (een lojen det) rolt over het papier naar beneden.

'Kijk hij beschrijft een wiskundige kromme.'

'Hoe bedoel je?'

'Doop hem maar eens in inkt.'

De baan tekent zich nu spetterig af op het mm-papier.

'Hé het is een echte grafiek.'

'Ja en wiskundigen zeggen nu: het balletje produceert twee verzamelingen getallen. De vertikale en horizontale streepjes. Een getal uit de horizontale noemen ze meestal x. Bij iedere x hoort dan een ander getal dat ze $f(x)$ noemen.'

'Wat heeft dat nu voor nut?' roept Michel.

'Nut? Ja eh . . .?'

Marjo komt mij te hulp: 'Ach jo daar leer je toch je hersens mee gebruiken.'

Ik zeg: 'Dank je wel, maar eigenlijk heeft Michel gelijk. Als ik jullie iets vraag ben ik ook niet tevreden met alleen de uitkomst. Dan vraag ik ook 'Hoe kom je eraan?' of 'Bewijs het eens'. Daarom zou ik eigenlijk moeten kunnen bewijzen dat mijn wiskunde nuttig is voor jullie, maar dat kan ik niet. Zullen we het niet gewoon voor de lol doen?'

'Ik vind het niet lollig', zegt Mark.

Ik zwoeg dus verder: 'Ja, waarom doen de mensen de dingen die ze doen? Ik

zie iedere dag als ik rustig fiets een man in een blauw trainingspak heel vermoeiend dezelfde weg hollend afleggen. Waarom doet ie dat?'
Michel: 'Dat doet ie om z'n konditie te verbeteren'.
'Bewijs dat maar eens.'
'Ja met een stopwatch.'
'Je hebt gelijk. Hij meet. Hij bewijst dat hij steeds harder kan. Ik moest dus aan jullie bewijzen dat je hersens van wiskunde beter gaan werken. Dat proefwerken goed gemaakt worden is eigenlijk geen bewijs . . ..'
De klas kijkt tevreden.
'Of wacht eens, als een fiets of een bromfiets remt krijg je ook zo'n grafiek. Met de formule bij de grafiek kan je de rem uitrekenen.' (Het klassieke voorbeeld is de kogelbaan, maar die vind ik niet nuttig en noem ik dus niet.)
De klas vindt dat ik me eruit gered heb en Michel roept: 'OK ga maar verder'.
Ik doceer: 'Nou kijk, bij iedere x hoort een getal $f(x)$. Als x groter wordt, wordt ook $f(x)$ groter. Maar dat gebeurt volgens een kromme. Eigenlijk kunnen mensen niet in kromme lijnen denken. Daarom passen wiskundigen een kunstgreep toe. Ze vervangen de kromme door rechte stukjes, die als een trapje er tegenaan liggen. Kijk zo. Zo kun je een veranderende verandering . . .'
'Wat bedoel je daarmee?' vraagt Marjo boos.
'Een verandering die steeds doorgaat met veranderen zonder dat je precies ziet hoe. Zoals . . . eh . . . zoals jij bijvoorbeeld zelf verandert.'
'Maar dat zie je toch?'
'Hè, nu?'
'Nou als je je haar afknipt of zo.'
'Ja, dát zie je. Dat is plotseling. Maar jouw groei. Vorig jaar was jij een heel ander meisje dan nu. Vaag en dromerig was je toen en stuurs en krities nu. Hoe is dat precies gegaan? Wiskundigen noemen dat een kontinue verandering.'
Het einde van het lesuur redt mij.
De volgende les leg ik de grote parabool weer op tafel. Een gedeelte van de klas komt er omheen staan. De rest ($\pm$ 1/3)is niet meer geïnteresseerd. Ik denk: 'Iets onder dwang aanleren is nog schadelijker dan helemaal niets leren', en laat het dus zo. Tegen de deelnemers zeg ik: 'Om te kijken hoe krom een kromme is maken wiskundigen dus gelijke stukjes Δx en bepalen de daarbij horende stukjes Δf. Teken dat trapje maar.'
'Het is een trap met ongelijke treden. Teken nu eens een grafiek van de hoogte van de treden.'
Dat doen ze braaf en tot mijn vreugde wordt die grafiek vrijwel recht.
'Dat heet de afgeleide. En je ziet eruit dat de toename van de toename van de parabool regelmatig is.'
Er wordt nog eens een knikker in inkt gedoopt en die heeft weer een nagenoeg rechte lijn als afgeleide. Dan komt Jos op een geniaal idee. Hij zegt: 'Als je het nu andersom doet. Je begint met een rechte grafiek en je doet of hij de toename is van zo'n andere. Krijg je dan ook zo'n parabool?'
'Probeer het maar.'

Ik geef hen de formule van een eerstegraadsfunktie. Daarbij tekenen ze de grafiek en als ze die beschouwen als grafiek van de stukjes Δf van een funktie,

die ik integraalfunktie noem, wordt dat een nog keuriger parabool dan de zwaartekracht voortoverde. 'Zullen we nu weer iets leuks gaan doen', zegt de klas en mijn hoop om door te stoten naar vierkantsvergelijkingen vervliegt.
Een andere klas, die de parabolen ziet hangen, wil er wel mee verder. 'Zijn er nog andere dingen die ook zo'n grafiek hebben?' vragen ze. Ik kom nu niet onder de kogelbaan uit (ik weet niets anders) en zeg: 'Als je iets door de lucht gooit, beschrijft het ook zo'n baan'.
'Maar dat kan je niet zien.'
'Nee maar we kunnen iets bedenken . . .'
Uiteindelijk werd in de verduisterde gym-zaal bengaals vuur afgeschoten onder verschillende elevatiehoeken. Een fototoestel, dat met de lens open, stond opgesteld, tekende netjes de verschillende parabolen op. Inderdaad kwam die onder 45° het verst.
Nog een andere klas, die zag dat er met vuurwerk is gewerkt, wil ook wel zo iets. 'Kunnen we geen vuurpijlen afsteken?'
'Ja maar dan is de baan veel ingewikkelder. Daar werkt steeds de stuwkracht van de raket in de richting van de baan en . . . o jé daar zul je wel differentiaalvergelijkingen . . .'
Om de stuwkracht te bepalen wordt een vuurpijl vastgebonden op een modelspoorwagentje. Er worden (na schooltijd) rails uitgelegd in de gang van de school. Leerlingen staan klaar met stopwatches en brandblussers. Lucifer. Knal. Rook. En we vinden alleen een gesmolten spoorwagentje terug. Maar ja de geschiedenis van de wetenschap bestaat ook niet alleen uit geslaagde proeven. Om buiten met vuurwerk te werken is toestemming van de gemeente nodig. Leerlingen gaan naar het gemeentehuis. Daarna komt een ambtenaar van de afdeling bijzondere wetten in mijn les, aan wie de leerlingen de noodzaak van hun experiment uitleggen. Toen mocht het.
De vuurpijlen stegen vertikaal ten hemel. Een waarnemer op afstand mat de hoek waaronder hij het hoogste punt van de baan zag. Uit zijn afstand tot de lanceerbasis kon daarmee de bereikte hoogte worden berekend. En uit de eveneens gemeten stijgtijd (tot punt van uitdoven) kon de stuwversnelling a benaderd worden uit $h = 1/2(a - g)t^2$.
Zo kwam ik toch nog bij mijn vierkantsvergelijkingen terecht, onder het oog van de verbaasde stamgasten van het café, waar we onze berekeningen uitvoerden. Het experiment moest immers bij nacht uitgevoerd worden.
De mooiste bundel parabolen die ik ooit heb aanschouwd kwam echter uit een emmer water die een leerling uit het hoogste raam van de school horizontaal langs de gevel wierp.

Projecties

W. GANZEVOORT

0 Bij de behandeling in 5 atheneum van lineaire afbeeldingen kwamen we de projecties tegen, en de vraag kwam op hoe je die kunt herkennen aan hun matrix. In de mij beschikbare litteratuur kon ik maar weinig daarover vinden. Een aantal eigenschappen en kenmerken heb ik hier bij elkaar gezet, misschien heeft u er iets aan, bijvoorbeeld als u in een opgave een projectie een rol wilt laten spelen.

1 Definitie. Zij V een lineaire ruimte. Een lineaire afbeelding P van V naar V heet een projectie als $P \circ P = P$.
We geven de beeldruimte (het bereik) van een lineaire afbeelding A aan als B_A, en de kern als K_A.

2 P is een projectie $\Leftrightarrow$ de beperking van P tot B_P is de identieke afbeelding op $B_P \Leftrightarrow I - P$ is een projectie $\Leftrightarrow K_P = B_{I-P} \Leftrightarrow B_P = K_{I-P}$.

3 Als P een projectie is dan geldt: $K_P \cap B_P = \{0\}$.

4 Als P een projectie is dan geldt: rang (P) + rang $(I - P)$ = dim V.

5 Als λ een eigenwaarde is van de projectie P, dan kan λ alleen 0 of 1 zijn. De eigenruimte van P bij 0 is K_p, de eigenruimte van P bij 1 is B_p.

6 De identieke afbeelding I en de nulafbeelding O zijn beiden projecties. Deze twee triviale gevallen laten we verder buiten beschouwing.

7 Als dim $V = n$ en dim $B_p = k$, dan kunnen we een basis $\{e_i | i = 1, \ldots, n\}$ kiezen voor V met $e_1, e_2, \ldots, e_k \in B_P$ en $e_{k+1}, \ldots, e_n \in K_P$. Ten opzichte van deze basis is de matrix van P dan een diagonaalmatrix, met $p_{ij} = 1$ als $i = j \leqq k$, en $p_{ij} = 0$ als $i \neq j \vee k < i \leqq n \vee k < j \leqq n$. Dan is spoor $(P) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii} = k$.
Dus: spoor (P) = dim B_P.

8 Als dim $V = 1$ zijn er geen projecties (buiten de triviale).
Als dim $V = 2$ geldt rang $(P) = 1$ en dus dim K_P = dim $B_P = 1$.
0 en 1 zijn dus elk eenmaal eigenwaarde.
De karakteristieke vergelijking van P $\det(\lambda I - P) = 0$ wordt dan $\lambda(\lambda - 1) = $
$= 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$ en dus spoor $(P) = 1$.

Als dim $V = 2$, dan geldt:
een lineaire afbeelding A is een projectie dan en slechts dan als rang $(A) = 1$ en spoor $(A) = 1$.

9 Willen we nu van een gegeven projectie de matrix opbouwen, dan kan dat op verschillende manieren.
Gegeven in R_2 twee lijnen l: $\bar{x} = \lambda\bar{a}$
en m: $\bar{x} = \mu\bar{b}$, beiden door de oorsprong.
Bepaal dan de matrix van de projectie P waarvoor $B_P = l$ en $K_P = m$.

Stel $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$

Eerste methode: bepaal de matrix uit het stelsel vergelijkingen $P\bar{a} = \bar{a} \wedge P\bar{b} = \bar{0}$
Uitgeschreven naar kengetallen:

$$\begin{cases} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 = a_1 \\ p_{11}b_1 + p_{12}b_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{21}a_1 + p_{22}a_2 = a_2 \\ p_{21}b_1 + p_{22}b_2 = 0 \end{cases}$$

Noemen we $d := a_1b_2 - a_2b_1$, dan wordt de gezochte matrix:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1b_2}{d} & \dfrac{-a_1b_1}{d} \\ \dfrac{a_2b_2}{d} & \dfrac{-a_2b_1}{d} \end{pmatrix}$$

Voor deze matrix geldt inderdaad spoor $(P) = 1$.

Tweede methode:
$$\begin{cases} K_P = m \Leftrightarrow p_{11}b_1 + p_{12}b_2 = 0 \wedge p_{21}b_1 + p_{22}b_2 = 0 \\ B_P = l \Leftrightarrow p_{11}a_2 - p_{21}a_1 = 0 \wedge p_{12}a_2 - p_{22}a_2 = 0 \\ \text{spoor } (P) = 1 \Leftrightarrow p_{11} + p_{22} = 1 \end{cases}$$

Dit levert dezelfde oplossing.

Derde methode: Neem een vector $\bar{p}$, en bepaal het beeld van $\bar{p}$ door de projecterende lijn te snijden met het bereik:

$$\bar{x} = \mu\bar{b} + \bar{p} = \lambda\bar{a}$$

Uitgeschreven naar kentallen: $\begin{cases} \mu b_1 + p_1 = \lambda a_1 \\ \mu b_2 + p_2 = \lambda a_2 \end{cases}$

We vinden dan $\lambda = \dfrac{p_1b_2 - p_2b_1}{d}$ en $\mu = \dfrac{p_1a_2 - p_2a_1}{d}$,

zodat

$$\begin{cases} p_1' = \dfrac{a_1b_2}{d}p_1 - \dfrac{a_1b_2}{d}p_2 \\ p_2' = \dfrac{a_2b_2}{d}p_1 - \dfrac{a_2b_1}{d}p_2 \end{cases}$$

en dat is weer dezelfde oplossing.

10 Als dim $V = 3$ dan geldt
rang $(P) = 2$ en B_P is een vlak door de oorsprong, de karakteristieke vergelijking is

$\lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$

en spoor $(P) = 2$.

of

rang $(P) = 1$ en B_P is een lijn door de oorsprong, de karakteristieke vergelijking is

$\lambda^2(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 = 0$

en spoor $(P) = 1$.

De eenvoudigste controle is:
A is een projectie als rang $(A) = 2$, rang $(I - A) = 1$, en spoor $(A) = 2$
of als rang $(A) = 1$, rang $(I - A) = 2$, en spoor $(A) = 1$.

11 Als de vergelijking van het vlak (B_P) is: $\bar{n} \cdot \bar{x} = 0$ en een richtingsvector van de kern is $\bar{r}$, dan moet $\bar{n} \cdot \bar{r} \neq 0$ en de matrix van P is (p_{ij}) met

$$p_{ij} = \delta_{ij} - \frac{r_i n_j}{\bar{n} \cdot \bar{r}}, \; (i, j = 1, 2, 3). \; (\delta_{ij} = 0 \text{ als } i \neq j \text{ en } \delta_{ii} = 0).$$

Vakdidaktische notities

FRED GOFFREE

7 Kijken naar wiskunde onderwijs

Stelt u zich voor, u bent wiskundeleraar – dat is niet moeilijk – en u zit in een derde klas van de basisschool – hetgeen minstens ongebruikelijk is – terwijl de juffrouw wiskunde onderwijst.
Wat zou u nu daarover opmerken, en waarom juist dat?

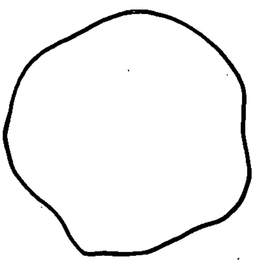
De kinderen zitten in groepjes aan grote tafels. Voor de klas staat een overhead projektor, schuin opgesteld, zodat ook het bord nog bruikbaar is.
De juf laat drie geldstukken zien. 'Weten jullie wat dit zijn?' Natuurlijk weet men dat: een stuiver, een kwartje en een dubbeltje!
'Hoe kun je die geldstukken herkennen', vraagt juf. Annemarie hoeft niet lang na te denken: de stuiver is het grootste. Dan legt juf de drie munten op de overheadprojektor. Op het scherm verschijnen drie zwarte schijven, ongelijk van grootte. 'Weet iemand welke nu het kwartje is?'. De juf kijkt vol verwachting naar Peter, die onmiddellijk zijn vinger opsteekt. Maar Peter wijst de verkeerde aan. 'Klopt dat wel', twijfelt de juf, 'ik dacht dat Annemarie zojuist iets anders heeft gezegd .....'. Niemand reageert, en daarom krijgt Peter, die nog voor de klas staat, een blinddoek voor. 'Kun je voelen welke van de drie het dubbeltje is, Peter?' Vreemd genoeg pakt Peter nog niet de kleinste. Op de vragende blikken van de juf weet Marco gelukkig voor een oplossing te zorgen. 'Het dubbeltje is 't kleinst, dan komt . . .'.

Juf gaat niet verder op deze grootte-problematiek in. Blijkbaar heeft ze andere plannen. Nu vraagt ze aan de klas: 'toch lijken die drie muntjes ook op elkaar, ze zijn toch wel een beetje '*t zelfde*?!' Brigitte begrijpt het meteen: 'ja, er staat op alle drie een Juliaantje!' Even is juf duidelijk verrast. Maar ze houdt aan: 'ze zijn alle drie .....' En als niemand reageert: 'Hoe zien ze eruit?' Natuurlijk komen de kinderen weer op het verschil in grootte. 'Nee', probeert juf, 'kijk nu eens goed hoe ze eruit zien!' ..... 'Wat hebben ze nu hetzelfde?' Marco brengt weer uitkomst: 'ze zijn alle drie rond'. 'Ja, dat zijn drie rondjes'!

Op het scherm zijn ze inderdaad scherp afgetekend, zwart op een helwitte ondergrond.

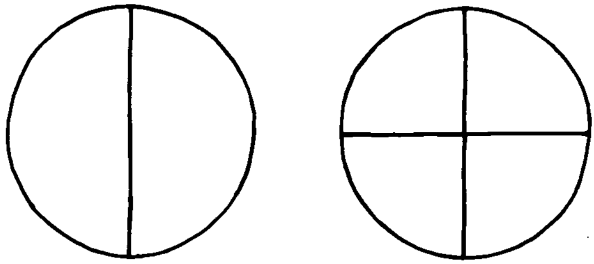
Gert Jan komt nog even terug op de voorgaande diskussie: 'de stuiver is groter'. 'Waarom?', vraagt juf. Gert Jan wijst met z'n vinger en verklaart: 'hij is wijder!'
'Hij is breder, is 't niet', licht juf nog toe.

We zijn terug bij het 'rond' van Marco. 'Wie kan er een rondje op het bord tekenen?'. Juf heeft het licht van de overhead projektor uitgeschakeld.
Hans durft wel. Hij tekent een piepklein rondje op het grote schoolbord. 'Goed, Hans, maar nu ook een grotere!' Naast het kleintje verschijnt een iets groter figuurtje, dat wel voor een cirkel kan doorgaan.
Gert Jan vindt het echter maar niets. 'Dat is helemaal niet rond'. Hij mag ook op het bord tekenen, doet het eerst eveneens piepklein en daarna iets groter.
Juf kijkt onderzoekend haar kinderen aan. 'Vinden jullie die rondjes echt rond?' Maarten maakt bezwaar: 'er zitten wel een beetje rechte hoekjes aan'. Juf wil meer: 'wanneer is iets precies rond? Helemaal precies rond?' Hans heeft goed naar Maarten geluisterd: 'als er geen hoekjes en rechte stukjes aanzitten!' Juf gaat er maar op in; ze tekent een grote kringel op het bord: 'dit is dus *niet* rond'. 'Maar wat is dan wel precies rond?'

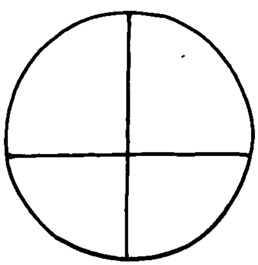


Ronald komt met een onbegrijpelijke oplossing, hij heeft zeker een broertje of zusje in de brugklas: '360°'.
Juf kan daar nauwelijks op in gaan. 'Dat heb je mooi geleerd, Ronald!
Als ik een cirkel maak – een cirkel of een rondje, dat is precies 't zelfde – wat is daar dan mee aan de hand?' Ze tekent een ovaal op het bord. 'Is dat een cirkel?' Hans ziet 't ineens. Tegen zijn eigen uitspraak in kan hij nu zeggen: 'dat is geen cirkel'. Andere kinderen komen nu ook in aktie. Iemand zegt, 'Het moet aan alle kanten 't zelfde zijn'. 'Wat bedoel je daarmee, aan alle kanten hetzelfde?'
Moeilijk om dat nu te zeggen. Johnny probeert 't toch: 'wat u daar getekend heeft, dat is aan de ene kant veel groter en daar veel kleiner'. Ook anderen proberen het en tenslotte kan juf een paar ideetjes samenvatten: 'als 't van het midden steeds even ver weg is, dan is het precies rond'.

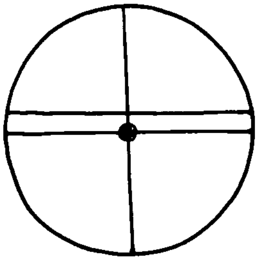
Op dit idee wordt verder geborduurd. 'Zullen we dat midden eens opzoeken?' Juf tekent slordig, zonder hulpmiddelen – een grote cirkel op het bord. Peter meent te weten hoe je 't midden vindt. Met een liniaal probeert hij 't zo uit te mikken dat er een lijn midden door de cirkel gaat. Dan ook zo'n lijn horizontaal:



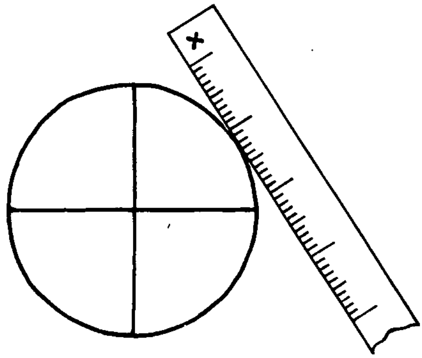
'En als 't precies is', zegt hij, 'dan is dit 't midden'.
Juf twijfelt duidelijk. Een andere leerling mag het beter (?!) doen. Hij volgt dezelfde metode, probeert nog preciezer te kijken en tekent:



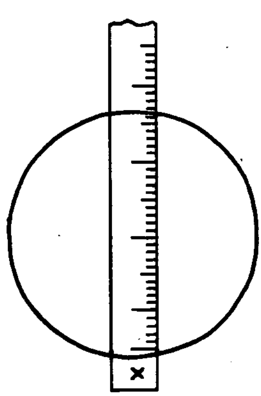
Juf grijpt in en tekent een horizontale koorde, die de middellijn beter benadert:



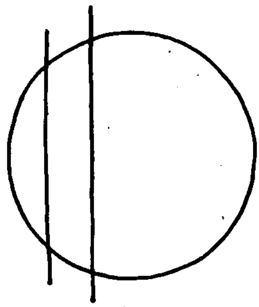
'En ik zeg dat dit het midden is'.
Vragend kijkt ze de kinderen aan. Maarten reageert. Hij wil naar het bord lopen om zijn woorden met aanwijzingen te ondersteunen, maar juf eist een verbale uitleg. Maarten, al gebarend: 'die streep die zo loopt, en waar die boven uitkomt, daar ga ik meten waar wat ..... wat, hoeveel centimeter het is tot ik bij die streep ben ..... en als alle vier die kwarten gelijk zijn, dan is het goed!'
Nu mag hij het op het bord nog eens doen. Met zijn liniaal meet hij langs de kromme lijn. Juf: 'Wat meet je nu Maarten?'
Maarten noemt zijn meetresultaten en konstateert, dat zijn voorganger onzuiver werkte: 'Dat is 12 en dat 18, dat is veel groter, dus dat is niet goed!'



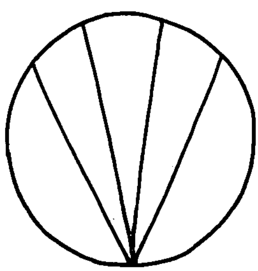
Op de vraag hoe je het dan wel goed kunt doen, moet hij het antwoord schuldig blijven. Brigitte weet het wèl: 'Die moet een stukje naar beneden!'
Juf gaat verder: 'Wat kun je nu anders doen? Je hebt dit (bovenste) gemeten en je heb dit (onderste gemeten ..... wat kun je nu veel handiger doen? Maarten zwijgt, Brigitte zwijgt en ook de anderen zijn duidelijk zwaar aan het denken. 'Ga maar zitten', zegt juf. Vragend wacht ze op reakties uit de klas. Dirk steekt zijn vinger plotseling omhoog. Hij heeft het. 'Als je die cirkel op een blaadje tekent en je vouwt hem om en dan nog een keer .....'.
'Ja', zegt juf, 'maar het bord kun je niet vouwen. 'Een meisje valt haar bij: 'Je kunt ook weleens niet precies vouwen .....'. Dat vindt juf maar onzin en ze veegt de opmerking van tafel.
Frits pakt de oude draad weer op: 'Zoals Maarten deed, maar Maarten zette de liniaal ergens neer, maar als je nu meet precies waar hij het grootst is en dan een streep zet precies waar het rondje het grootst is, en ook een streep zo .....'.
Juf neemt het idee op: 'Welke lijn gaat daar steeds doorheen, waar het rondje het breedst is? Hoe vind je nou die plek waar het precies het grootst is?'
Frits weet 't wel: 'Ik kijk gewoon'. Voor het bord laat hij zien hoe zijn timmermansoog werkt. Juf krijgt hem evenwel aan het meten. 'Wat meet je, Frits?' 'Hoe groot is het?' 'Het is 13 cm'.



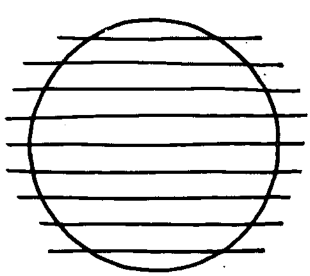
Juf gaat er – gemeen – op in: 'Maar als ik zo meet, is het maar 10 cm, en zo maar 5 cm'. Frits meet met de liniaal: hij meent de langste te vinden: 13 cm.



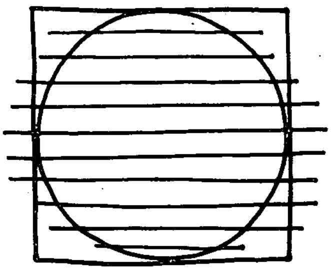
Dan gaat hij horizontaal meten. 'Als die nu ook 13 cm is .....'.



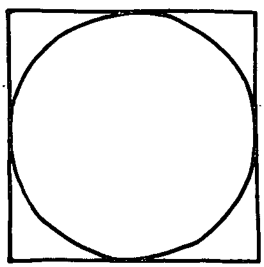
Teleurgesteld moet hij melden: 'Maar dat is hij niet, 't is 16 cm'. Juf – misschien haar slordige bordtekening betreurend – valt hem bij. 'Het is toch niet zo gek! Een goed idee. Je zoekt eigenlijk de langste lijn'. Ze tekent:



'Hoe zouden we de langste lijn kunnen vinden?' Wim weet raad: 'Je meet die andere stukken' – hij wijst de komplementen van de koorden aan – 'en welke 't langst is, daar zit ook de langste!'
Door het plaatje wat nu ontstaat als juf Wim's idee uitlegt, komen enkele kinderen op een nieuw idee, duidelijk geïnspireerd door de tekening. 'Je maakt een vierkant om de cirkel'.



Juf maakt een nieuwe schets:



En via de middens van de zijden vindt men een zeer bevredigende oplossing. Toch gaat juf door. 'Als ik dat vierkantje heb, kan ik toch gemakkelijker het middelpunt vinden?' Peter vraagt haar de lijnen van hoek naar hoek te tekenen. De klas slaakt een zucht van verlichting.

Juf wil een paar namen leren; dat praat gemakkelijker: 'Die lijn, dat is de breedste lijn, de allerlangste lijn, de lijn, die precies door het midden gaat, die heet middellijn'.
Het nieuwe woord komt op het bord te staan. 'En die lijn, die eromheen gaat, noemen we omtrek'. Ook 'omtrek' wordt op het bord geschreven. 'Dat puntje, dat precies in het midden ligt, dat heet 'middelpunt'.' Met deze drie woorden kunnen ze het voorlopig doen.

De kinderen mogen het geleerde toepassen door van kartonnen rijksdaalders het middelpunt te zoeken en de omtrek te meten. Verschillende aanpakken blijken nog mogelijk. In het laatste geval gebruiken sommigen een touwtje en anderen de liniaal. Een lastige techniek, je ziet ze zwoegen . . . . . .

U heeft het onderwijs in deze derde klas nu ook een keer 'gezien'. Wat vindt U ervan? Maak ook eens enkele vakdidaktische notities. Volgende keer wil ik graag laten zien hoe nietsvermoedende beginners op een PA en door de wol geverfde wiskundeleraren hierop hebben gereageerd.

SMP 7-13

P. G. J. VREDENDUIN

Over het werk van de S.M.P. is in Euclides op zo verschillende plaatsen een artikel of boekbespreking verschenen, dat het voor een belangstellende lezer plezierig kan zijn een overzicht te hebben over de plaatsen waar hij een inlichting kan vinden.
Hieronder volgt dit overzicht.

SMP Books A–H (bestemd voor comprehensive schools) *48* (1972–73) no 6, blz. 201–210.
SMP Cards (bestemd voor de eerste twee leerjaren van de comprehensive schools; de kaarten lopen parallel met de boeken A–D, maar zijn begrijpelijk voor een ruimere groep leerlingen) *51* (1975–76) no 2, blz. 57–67.
SMP Books X, Y, Z (A–G en X–Z bevatten samen de stof voor O level) *51* (1975–76) no 2, blz. 79–81.
SMP Books 1–5 (bestemd voor O level) *50* (1974–75) no 8, blz. 303–320.
SMP Supplementary Booklet One-Five (aanvullend oefenmateriaal bij A-H, X-Z en 1–5) *53* (1977–78) dit nummer.
SMP Advanced Mathematics Books 1–4 (bestemd voor A level) *51* (1975–76) no 2, blz. 45–56.
SMP Revised Advanced Mathematics Book 1 *49* (1973–74) no. 4, blz. 157.
SMP idem 2 *51* (1975–76) no 2, blz. 81.
SMP Further Mathematics Series (bestemd voor hen die op A level wiskunde bovendien als speciaal onderwerp kiezen)
I Linear Algebra and Geometry *53* (1977–78) dit nummer.
II Vectors and Mechanics *53* (1977–78) dit nummer.
III Differential Equations and Circuits *52* (1976–77) no. 10, blz. 398.
IV Extensions of Calculus *53* (1977–78) no. 1, blz. 36.
V Statistics and Probability *52* (1976–77) no 3, blz. 114.
SMP Computing in Mathematics, Data Processing (niet bestemd voor het huidige leerplan) *50* (1974–75) no 8, blz. 331–332.
SMP Handbooks, Maxwell, Geometry by Transformations *52* (1976–77) no 9, blz. 357–358.

De laatste jaren heeft de SMP haar werkzaamheden ook uitgebreid over het basisonderwijs. SMP 7–13 is daar de neerslag van. Deze uitgave zal bestaan uit zes units, bestemd resp. voor de leeftijdsgroepen 7, 8, 9, 10, 11, 12. Van deze

units zijn thans (maart 1977) de eerste twee voltooid.
Het Engelse onderwijs begint met de infant school. Deze school is bestemd voor leerlingen van 5 en 6 jaar. Voor de infant school heeft de SMP nog geen materiaal ontworpen. Het ligt in de bedoeling dit wel te gaan doen.
Sommige leerlingen gaan op hun 11e jaar naar het secundaire onderwijs. Voor hen zijn de laatste twee units niet bestemd. Vele gaan echter naar een zogenaamde middle school. Deze houdt de leerlingen als regel van hun 9e tot hun 13e jaar. De leerling van de middle school gebruikt dus ook de laatste twee units. Deze zullen parallel lopen met de Books A–D.
De units 1 en 2 bestaan samen uit een 700-tal kaarten. De kaarten zijn fraai en stevig uitgevoerd. Dit is ook beslist noodzakelijk, want anders zouden ze door de jonge kinderhandjes snel onbruikbaar worden gemaakt. De keerzijde is dat de uitgave zeer kostbaar is. Elke unit kost 35 £. Men moet hierbij wel bedenken dat één unit voldoende materiaal bevat voor een gehele schoolklas voor een heel jaar. Een ingenieus systeem maakt dit mogelijk. De leerstof is verdeeld in 14 onderdelen. Deze kunnen in willekeurige volgorde bestudeerd worden. Daardoor kunnen verscheidene leerlingen tegelijk met één set kaarten bezig zijn. Bovendien bestaat nog de mogelijkheid de leerlingen in groepen te laten werken of een halve klas tegelijk rekenen te geven en de andere helft een ander vak.
Behalve deze verticale verdeling van de leerstof in 14 onderwerpen is er een horizontale verdeling in drie trimesters. De series kaarten bestemd voor het eerste trimester zijn genummerd 1–14. Die voor het tweede trimester overeenkomstig 21–34 en die voor het derde 41–54.
Elke leerling werkt dus eerst de kaarten van de series 1–14 in willekeurige volgorde af, daarna die uit de series 21–34 en ten slotte die uit de series 41–54.
Een groot aantal apparaten en voorwerpen moeten in het klasselokaal aanwezig zijn en door de leerlingen bij het uitvoeren van opdrachten gebruikt worden. Ik citeer uit het Teacher's Handbook: balance, clock stamp, coins, counters, cubes, scissors, bowl, jugs, large jam jar, beaker, marbles, bucket, saucepan, matchboxes, peas, dry sand. De opsomming is verre van volledig maar geeft een voldoende beeld van de leersituatie.

Nu de veertien onderwerpen. Deze zijn:
optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deling, breuken, geld, lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht, tijd, grafieken, vorm en hoeken.
De kaarten gaan ervan uit dat de leerlingen op de infant school reeds enig algemeen inzicht hebben verkregen. Men neemt aan dat ze bijvoorbeeld de namen van de munten kennen, reeds weten wat een kubus, een cilinder, een bol, een cirkel is. Voor alle zekerheid wordt deze kennis wel gerepeteerd. Op rekenkundig niveau is het uitgangspunt, dat de leerling heeft leren optellen en aftrekken met eenvoudige getallen (tot 30). Ook dit wordt gerepeteerd.
Op de vraag: 'Is there much new mathematics?' antwoorden de samenstellers: 'No. The curriculum follows a course representing the best of what most schools are now teaching. In the first three years SMP 7–13 establishes a firm foundation with work on number, including practice on computational skills, measurement, and shape.'
Laten we nu eens gaan zien hoe dit programma uitgevoerd is.

Unit 1

Wat *optellen* is, weten de leerlingen al. Wel moeten ze de betekenis van de decimale schrijfwijze nog leren doorgronden. Dit geschiedt door van een hoeveelheid voorwerpen tientallen af te zonderen en ook met behulp van de abacus. Veel kaarten zijn gewijd aan het mechanisch leren uitvoeren van de opteloperatie.

Ook de *aftrekking* is een al bekende bewerking. Toelichting geschiedt nog wel met behulp van de getallenlijn en van afbeeldingen (subtract 2). Weer veel kaarten voor de mechanisering. ⟶

Om de *vermenigvuldiging* voor te bereiden wordt eerst successieve optelling met een zelfde getal geoefend (ook: $1 + 3$, $1 + 3 + 3, \ldots$). Ook hier werkt de getallenlijn verduidelijkend. In het tweede trimester zien we, dat $6 + 6 + 6 + + 6 = 4 \times 6$.

De *deling* wordt voorbereid door hoeveelheden objecten in gelijke delen te verdelen. In het tweede trimester meer abstract; 16 is 2 hoeveelheden van . . .

Het onderwerp *geld* geeft de mogelijkheid de geleerde operaties in de praktijk toe te passen. We doen inkopen (vermenigvuldigen en optellen), krijgen wisselgeld terug (aftrekken) en vragen: ik heb 30 p., hoeveel taartjes van 10 p. kan ik hiervoor kopen (delen)?

De *breuken* verkeren uiteraard nog slechts in een pril stadium. Een figuur (vierkant of cirkel) wordt verdeeld in 2 of 4 gelijke delen. Zo leren we eerst de breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$ kennen en later ook $\frac{3}{4}$ en zien dat $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Interessanter worden de kaarten, zodra ze zich niet meer beperken tot het kwantitatieve aspect, maar ook het kwalitatieve aspect in de beschouwingen betrekken. Een voorproefje zien we al bij kleiner en groter ($<$ en $>$). Niet alleen getallen worden vergeleken, maar de kinderen zien ook een grote beer naast een kleine beer afgebeeld.

Nader uitgewerkt wordt het kwalitatieve aspect in de hoofdstukken over lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht. Wat hier geleerd wordt, is het volgende:

1 men kan kwaliteiten met elkaar vergelijken (rangschikken naar bijv. grootte);
2 bij het vergelijken van een kwaliteit (lengte) moet men abstraheren van andere kwaliteiten (dikte);
3 men kan schatten wat het resultaat is van een kwalitatieve vergelijking; verificatie van het geschatte resultaat door middel van een experiment is noodzakelijk;
4 om een kwaliteit te meten moet men eerst een eenheid kiezen, de keuze van deze eenheid is op vele manieren mogelijk;
5 men kan het meetresultaat schatten; het geschatte resultaat dient door meting geverifieerd te worden.

Voor het vergelijken van *lengten* moet men enige poppetjes naar lengte rangschikken. Er zijn magere en dikke bij. Van de dikte moet men afzien. Daarna gaan we lengten meten. We kiezen een eenheid bijv. een span, een schrede, een vingerlengte, een handbreedte, de lengte van een onderarm, de lengte van een stuk lint of van een strootje. We meten hoeveel schreden de lengte van het klaslokaal is. We ontdekken de subjectiviteit van deze meetresultaten, het resultaat is afhankelijk van de persoon aan wie de eenheid ontleend is. Lint en strootje zijn objectiever. Ten slotte komt in het derde trimester de centimeter ter sprake.

Metingen worden verricht met behulp van een liniaal en een centimeter. Ook bij het bepalen van *oppervlakten* wordt eerst een eenheid gekozen. Vragen rijzen als: met hoeveel lucifersdoosjes kun je deze figuur bedekken of met hoeveel kroonkurken? Eerst later wordt de oppervlakte gevonden door te ontdekken uit hoeveel vierkanten, rechthoeken of driehoeken een bepaalde figuur opgebouwd is. Dit vierkant, deze rechthoek of driehoek fungeert als eenheid. Eerst worden *inhouden* vergeleken. Wat heeft groter inhoud: deze kom of deze kan? Het resultaat van de schatting wordt experimenteel geverifieerd: de kom wordt met water gevuld en het water wordt overgegoten in de kan. Hoeveel kannen water gaan er in een emmer? Eerst schatten en dan meten. De kan wordt tot eenheid. De inhoud van voorwerpen met geheel verschillende vorm wordt vergeleken (dikbuikige vazen en cilindrische vazen), experimentele verificatie volgt. De leerling leert dat men bij inhoudsbepalingen abstraheren moet van de vorm.
Ten slotte het *gewicht*. Schat eens wat zwaarder aanvoelt: deze liniaal of deze verfkwast. Houd er in elke hand één. Verifieer door middel van een balans. Neem twee bolletjes plasticine die even zwaar zijn. Maak het ene bolletje plat. Welke is nu het zwaarste? Zo leren we dat ook bij gewichtsbepaling abstraheren van de vorm vereist is. Daarna kiezen we als eenheid een erwt, een kroonkurk of iets dergelijks. Hoeveel erwten wegen evenveel als mijn liniaal?

Nu nog kort de inhoud van de andere hoofdstukken.
Tijd. We leren de dagen van de week, de maanden van het jaar. En uitvoerig op de klok kijken.
Grafieken. Maak een tabel en een bijbehorend histogram. Bijv. vraag elke leerling van de klas naar zijn lievelingsvrucht. Vier leerlingen geven op dat dit de peer is. In het beeldhistogram worden dan 4 peren boven elkaar getekend. In het derde trimester wordt het beeldhistogram vervangen door een histogram dat opgebouwd is uit vierkantjes.
Vorm. We leren vormen herkennen. Eerst tweedimensionale afbeeldingen van driedimensionale figuren (kubus, balk, cilinder, prisma, bol, kegel) en daarna tweedimensionale figuren (rechthoek, vierkant, driehoek, cirkel). Ik vond de opmerking, dat een vierkant een bijzonder soort rechthoek is. Zijvlak, ribbe en hoekpunt komen ter sprake.
Hoek. We leren wat een kwart draai en een halve draai is, wat links en wat rechts is, wat links afslaan en rechts afslaan is. Verder wat draaien in de richting van de klok en tegen de richting van de klok in is. En ten slotte wat een rechte hoek is.
Een aantrekkelijk geheel, degelijk, gericht op de praktijk en niet would-be modern. De grondinzichten komen overeen met de inzichten die ten grondslag liggen aan het werk van de S.M.P. voor het vervolgonderwijs. Zo ontstaat een goed sluitend geheel.

Unit 2
Hierover kunnen we korter zijn. De algemene tendens die we in unit 1 zien, wordt voortgezet.
Het rekenen wordt uitvoerig geoefend. Ditmaal staat de mechanisering minder

centraal en wordt meer zorg besteed aan begrijpend rekenen. Gedemonstreerd wordt dat optelling en vermenigvuldiging commutatief zijn. Gerekend wordt met even en oneven. Geoefend wordt in het schrijven van een getal als produkt van twee factoren.
Voor de operatie deling wordt een symbool ingevoerd. Eerst wordt geschreven: $20 : 5 = 4$, later ook $\frac{20}{5} = 4$ en $5\overline{)20}^{\,4}$. Dan komt de deling met rest, geschreven

$$\begin{array}{l} \;\;4 \text{ r. } 1 \\ 2\overline{)9} \end{array}$$

Bij de breuken komen ook de noemers 3, 6, 8, 9 en 12 ter sprake en leren we een eenvoudige breuk vereenvoudigen.
Bij lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht wordt op de ingeslagen weg voortgegaan. Standaardeenheden worden geïntroduceerd. Naast de cm uit unit 1 nu ook de meter. Verder de cm^2, de gram, de kg, de liter en de milliliter. De gram is het gewicht van een concreet gegeven gewichtje, de liter de inhoud van een concreet gegeven kan.
Bij de vormen zien we symmetrische figuren optreden. We moeten op ruitjespapier het spiegelbeeld van een figuur tekenen. Verder komen ter sprake de (willekeurige) vierhoek en ook de vijfhoek, de zeshoek, de achthoek en het viervlak. Deze worden echter alleen regelmatig getekend. Verder leren we de woorden diagonaal, diameter en omtrek.
Bij de hoeken komen de windrichtingen aan de orde.
Unit 2 geeft dus een uitbreiding en vooral een consolidering van datgene wat in unit 1 aangesneden is.

Het ruitentwaalfvlak, koningin der veelvlakken

Ir. Y. C. G. Nottrot †

Vervolg. Het eerste deel van dit artikel is opgenomen in Euclides jaargang 53, nummer 3.

8 *In een dichtste stapel van een oneindig aantal gelijke bollen wordt elke bol rakend omsloten door twaalf andere. De raakpunten vormen de hoekpunten van een geknotte kubus (fig. 10a en b).*

ad 8. Zulk een dichtste stapel bestaat uit een reeks evenwijdige vlakke lagen, waarin de bollen in driehoeks- of in vierkantspatroon tegen elkaar zijn gelegd.

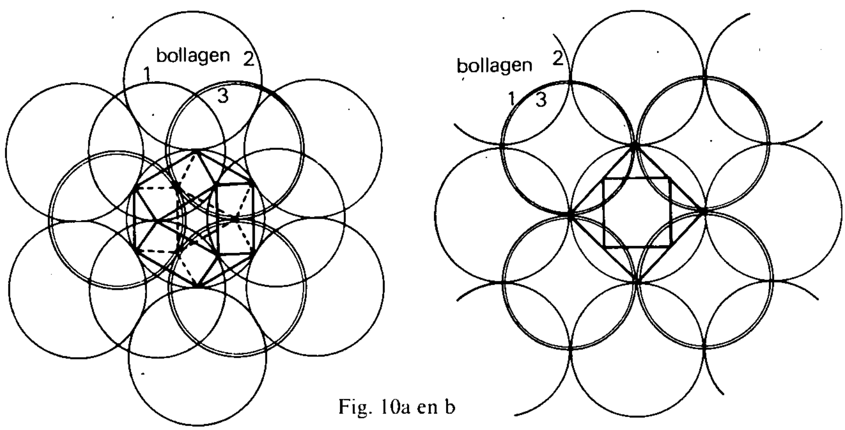


Fig. 10a en b

In het eerste toont figuur 10a, in het tweede figuur 10b, hoe een bol van de stapel aan twaalf der omgevende bollen raakt en dat de raakpunten de hoekpunten zijn van een in de bol ingeschreven geknotte kubus.
In driehoekspatroon moeten, om een zo regelmatig mogelijke stapel te verkrijgen, steeds pas de bollen van de $(n+3)$-de laag recht boven die van de n-de komen. Met reeds de $(n+2)$-de laag boven de n-de wordt de stapel wel even dicht, maar krijgt niet de gewenste harmonische structuur.
Worden de lagen in vierkantspatroon gelegd, dan is er geen keus en wordt automatisch de gewenste juiste stapel gevormd, deze is ruimtelijk evenwel anders gericht (zie 9).
Dat het geen verschil maakt van welk der beide patronen men uitgaat, blijkt ook hieruit, dat in het driehoekspatroon het 'gebied' van elke bol in de laag

$2r^2\sqrt{3}$ is, bij een hoogte van $\frac{2}{3}r\sqrt{6}$, en in het vierkantspatroon resp. $4r^2$ bij $r\sqrt{2}$, wat voor beide het produkt $4r^3\sqrt{2}$ tot inhoud geeft.
Met r als straal van de ingeschreven bol is dit dus tevens de inhoud van het r-12-vl. De ingeschreven bollen van een stapel r-12-vl^n vormen nl. alle tezamen eveneens die dichtste stapel bollen. De 'ruimtevullings-graad' van de stapel

is het quotiënt van $\frac{4}{3}\pi r^3$ en $4r^3\sqrt{2}$, dat is $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0{,}7405$.

Primaire stapeltjes zijn er van vier en zes bollen. Hun middelpunten vormen de hoekpunten van resp. een tetraëder en een oktaëder. Met deze tetraëders en oktaëders in verhouding 2 op 1 is, als reeds in (3) gezegd, een ruimtevullend geheel op te bouwen. Alle hoekpunten hierin zouden de middelpunten kunnen zijn van de bollen van een dichtste stapel. Ze zijn tevens hoekpunt van de 8 tetraëders en 6 oktaëders die het omringen en die tezamen een oktaëder vormen van dubbel formaat (fig. 11).

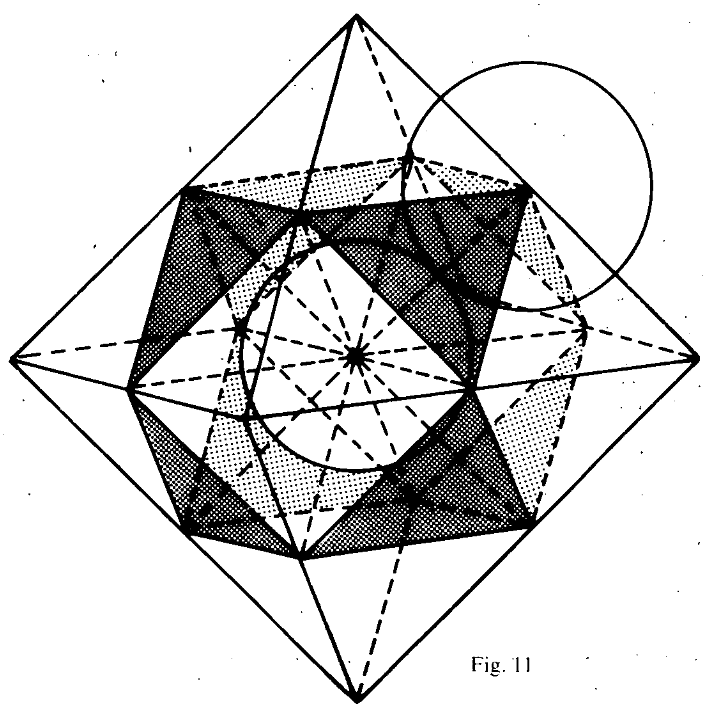


Fig. 11

Bij een straal van de bollen gelijk r, dus de ribben van tetraëder en oktaëder gelijk $2r$, is de inhoud van de tetraëder $\frac{2}{3}r^3\sqrt{2} = 0.943r^3$ en die van de oktaëder $\frac{8}{3}r^3\sqrt{2} = 3{,}771\ r^3$.

Stel de standhoeken op de ribben resp. φ en $180° - \varphi$ (want ze zijn elkaars supplement). Hoek φ is de sec.3-hoek, de scherpe hoek van de r-12-vl.-ruit, (5), d.w.z. $\varphi = 70°31'44'' = 70{,}529°$.

De gezamenlijke 'inhoud bol' in de tetraëder is dan

$$4 \cdot \frac{3\varphi - 180°}{720°} \text{bol} = \frac{\varphi - 60°}{60°} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 0{,}735\, r^3$$

en in de oktaëder

$$6 \cdot \frac{4(180° - \varphi) - 360°}{720°} \text{bol} = \frac{90° - \varphi}{30°} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 2{,}719\, r^3$$

De holte in de tetraëder heeft dus 0,208 r^3 inhoud en in de oktaëder 1,052 r^3. De 'ruimtevullingsgraad' van de gezamenlijke boldelen in de sec-2-rhomboëder – en dus ook van de gehele stapel bollen – komt hieruit dus opnieuw als

$$\frac{2 \times 0{,}735 + 2{,}719}{2 \times 0{,}943 + 3{,}771} = \frac{4{,}189}{5{,}657} = 0{,}7405 \text{ naar voren.}$$

Omdat de bolschilsegmenten de middens van de ribben verbinden, hebben *in* de tetraëders de holtes de globale vorm van een oktaëder en *in* de oktaëders van een geknotte kubus.
De eerste (fig. 12a) hebben vier ingebogen boldriehoekige wanden en vier driespitsige 'open ramen', de tweede (fig. 12b) zes ingebogen bolvierkante wanden en acht driespitsige 'open ramen'.

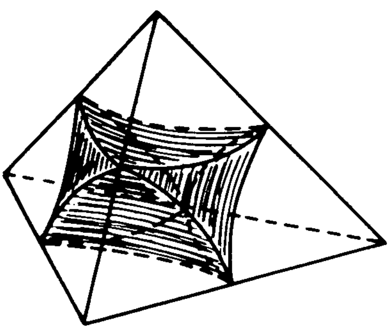
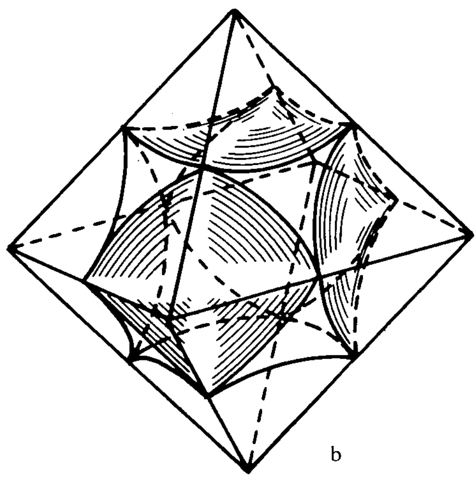


Fig. 12a



b

Natuurlijk zijn álle zijvlakken aan elkaar gelijk, want in de bollenstapel is er geen zichtbare opdeling in tetraëders en oktaëders. Ook de 'ramen' (0,161 r^2 in oppervlakte) passen opeen en verbinden de holtes. Waren deze gevuld en de bollen leeg, dan was het resultaat een poreus lichaam, de bolvormige poriën elk met twaalf onderlinge raakpunten, doch overigens van elkaar geïsoleerd.

9 *De zijvlakken van de geknotte kubus geven de zeven richtingen aan van de in een dichtste bollenstapel te onderkennen vlakke lagen (fig. 13), namelijk*
de vier paar driehoekige zijvlakken de vier richtingen der lagen in driehoekspatroon en
de drie paar vierkante zijvlakken de drie richtingen der lagen in vierkantspatroon.

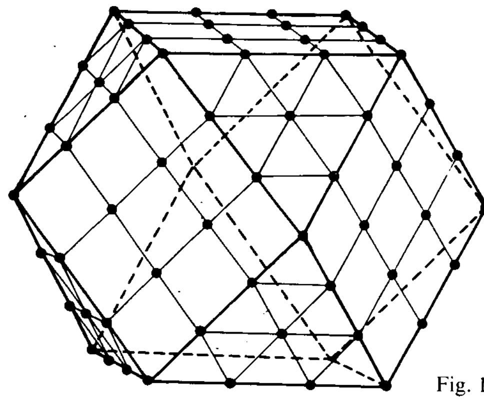


Fig. 13

ad 9. De geknotte kubus toont dus duidelijk de structuur van de dichtste bollenstapel. In figuur 13 zijn de middelpunten aangegeven van de bollen die in dichtste stapel liggen volgens de zijvlakken van een geknotte kubus met vier bollen op elke ribbe (totaal 60 op 24 ribben). De stapel telt in het geheel 147 bollen, waarvan in de mantel (de buitenste bollen) 92.
Binnen die mantel is opnieuw een geknotte kubus, nu met drie bollen per ribbe (totaal 36 op de 24 ribben) en 55 bollen in totaal, waarvan 42 in weer een mantel. Tenslotte is de kern de geknotte kubus van de twaalf bollen om de centrale bol. De reeks 1, 13, 55, 147, 309, enz. is een rekenkundige reeks van de derde orde, de eerste verschillen zijn de aantallen bollen in de mantels.
N.B. Wanneer niet van één enkele bol, maar van een klein deel van een dichtste stapel wordt uitgegaan, dan zullen de eerstvolgende mantels nog een afwijkende vorm hebben, maar geleidelijk wordt die van de geknotte kubus benaderd.
Wanneer de primaire stapeltjes in tetraëder- en oktaëdervorm (zie ad 8) tot kern worden gekozen, zijn de eerste mantels die, waarvan resp. in figuur 14a en figuur 14b de bolmiddelpunten zijn aangegeven.
Eerstbedoelde toont ribben van twee lengtes die $2r$ verschillen, dit verschil blijft bij volgende mantels onveranderd. Vandaar de overgang naar meer en meer de geknotte -kubus-vorm.

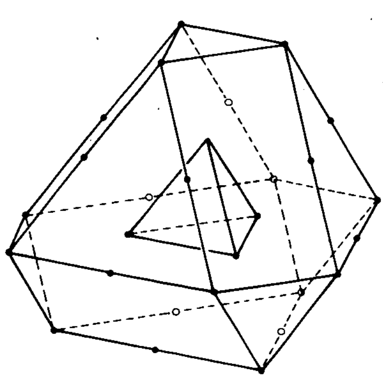
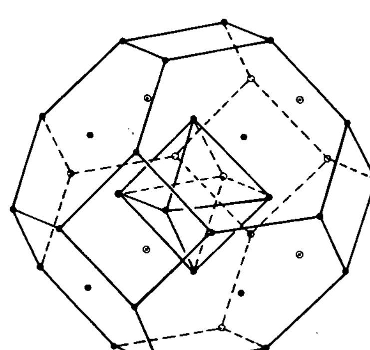


Fig. 14,



b

Bij de opeenvolgende mantels van de oktaëder blijven de twaalf ribben die evenwijdig zijn met die van de oktaëder van constante lengte $2r$. Ook hier is de limiet-vorm de geknotte kubus.
De reeksen van de totale aantallen bollen zijn nu resp. (0), 4, 28, 92, 216, enz. en (0), 6, 38, 116, 260, enz.

10 *Een dichtste stapel plastische bollen wordt onder alzijdige druk een aaneengesloten stapel ruitentwaalfvlakken.*

ad 10. Een dichtste bundel plastische cilinders wordt bij druk rondom vervormd tot een bundel aaneengedrongen regelmatig-zeshoekige-staven.
Een driehoekspatroon van plastische ronde schijven tussen twee vlakke platen gelegd, zal bij zulk een druk veranderen in een plateau van regelmatige zeshoekige schijven.

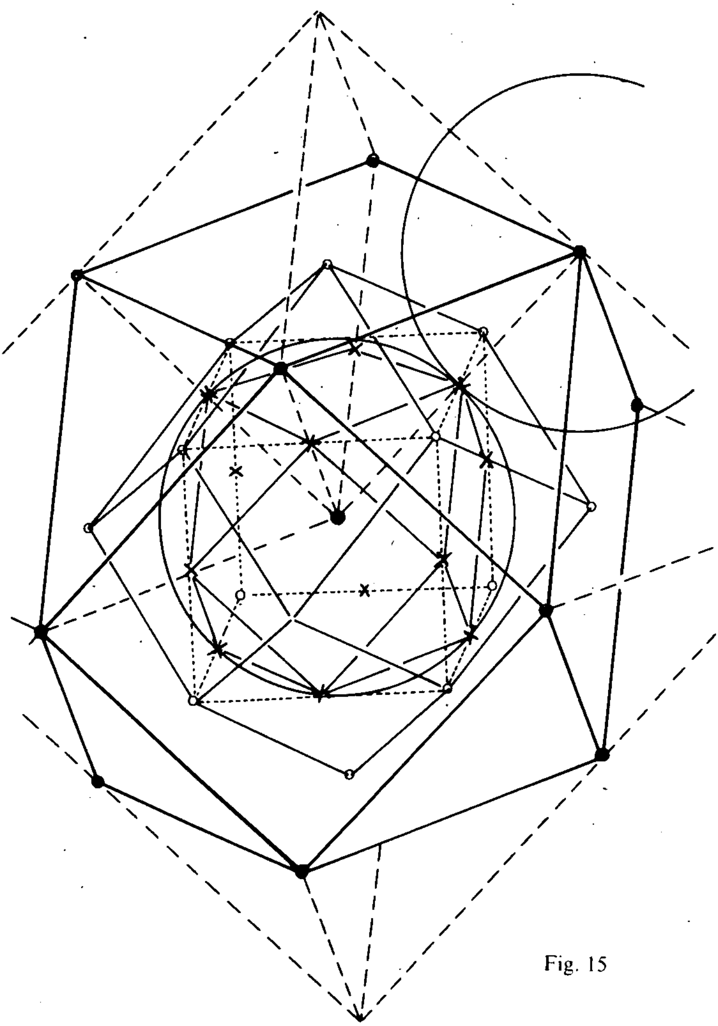


Fig. 15

Zo zal, naar analogie, een dichtste stapel plastische bollen onder alzijdig gelijke druk tot een aaneengesloten stapel r-12-vl^n worden samengedrukt. Voorshands denken we ons deze dichtste stapel bollen onbegrensd.
Tot begrip van het vervormingsverloop onderstellen we de bollen elk nog voorzien van de *in*geschreven geknotte kubus en het *om*geschreven r-12-vl. (fig. 15) De stapel bovendien, via het middelpuntenrooster verdeeld in tetraeders en oktaëders. In de middens hiervan, dus in de holten, liggen de hoekpunten van de r-12-vl^n. In de tetraëders de drie-, in de oktaëders de vierribshoekpunten. Rondom deze hoekpunten sluiten zich vier, resp. zes r-12-vl^n aaneen op in totaal 4 ribben en 6 zijvlakken, resp. 8 ribben en 12 zijvlakken. De druk zet in op de raakpunten, de hoekpunten van de ingeschreven geknotte kubussen. Terwijl de plastische materie naar de holtes wordt gedreven, drukken de elkaar rakende bollen op deze twaalf plaatsen elkaar meer en meer plat. Deze vlakken, eerst cirkelvormig, nemen na en door de onderlinge ontmoeting gaandeweg de sec.3-ruitvorm aan, nadat eerst de tetraëder-holten en tenslotte ook de ongeveer vijf maal zo ruime oktaëder-holten zijn gevuld (zie ad. 8).
N.B. Het zou bevredigend zijn de hier in theorie gestelde eigenschap materieel aan te tonen. Dit kan wellicht door een voldoende aantal plastische bollen in een dichtste stapel van geknotte-kubus-vorm met een plastic hulsel te omgeven, waarna er de lucht zoveel mogelijk uit wordt weggepompt. Hiermede is aan de voorwaarde van een alzijdig gelijke druk voldaan.
De meer binnenwaarts gesitueerde bollen zouden dan tot r-12-vl^n moeten zijn geworden.

Enquête wiskunde II

Van de 435 VWO-scholen zijn er 28 waar geen wiskunde II gegeven wordt. Van de resterende 407 hebben 318 scholen gereageerd. Op 8 van deze scholen werd meer dan één keuzeonderwerp gegeven. Ze konden daardoor niet in de computer verwerkt worden en zijn verder buiten beschouwing gelaten. Hieronder volgt dus het resultaat van 310 scholen.

Welke keuzeonderwerpen worden behandeld?

onderwerp	aantal scholen
complexe getallen	271
topologie	2
getaltheorie	4
numerieke wiskunde	15
projectieve meetkunde	4
niet-euclidische meetkunde	0
logica	5
geschiedenis van de wiskunde	2
toepassingen van de analyse	1
ander onderwerp	6

Welke boeken werden gebruikt?

boek	aantal scholen
complexe getallen (Freudenthal en Nijdam)	230
id. (Leujes)	10
topologie (Chinn en Steenrod, vert. Van Dormolen)	1
id. (Mansfield, Introduction to topology)	1
numerieke wiskunde (Vonk)	13
projectieve meetkunde (Vonk)	4
geschiedenis van de wiskunde (Bunt c.s., Van Ahmes tot Euclides)	1

Welke overige onderwerpen werden gegeven?

combinatoriek
constructies
computerkunde

Boole algebra (boek: Bouqué, Boole'se algebra's, Story's wiskundige monografieën)
Schakel- en boole algebra (Mathematik Unterricht, Jahrg. 20, Heft 2)
relativiteitstheorie (Boek: Taylor-Wheeler, Space-Time Physics).

Hoeveel lesuren werd aan het keuzeonderwerp besteed?
In kolom A staat het aantal lesuren; in kolom B het aantal scholen dat dit aantal lesuren aan het keuzeonderwerp besteedde in klasse 5, in kolom C in klasse 6 en in kolom D in de klassen 5 en 6 samen.

A	B	C	D	A	B	C	D
0	118	6	1	26–30	22	36	34
1–10	15	24	3	31–35	13	35	49
11–15	25	43	15	36–40	7	32	93
16–20	55	66	7	41–50	4	11	66
21–25	45	57	25	meer dan 50	6	0	17

Wat is het gewicht van het keuzeonderwerp in het s.o.?
Het totale gewicht van het schoolonderzoek wiskunde II is 100 gesteld.

gewicht	aantal scholen	gewicht	aantal scholen
1–5	9	21–25	52
6–10	35	26–30	17
11–15	61	meer dan 30	43
16–20	93		

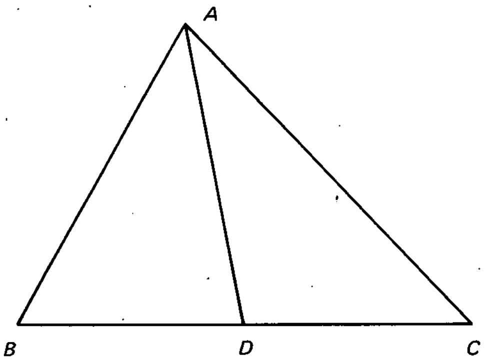
De aandacht van de leerlingen voor het keuzeonderwerp was over het algemeen even groot als voor meetkunde met vectoren.
Onverwachte resultaten heeft de enquête niet opgeleverd. Het blijkt dat 88% van de scholen complexe getallen gekozen hebben en dat van deze scholen 85% werkt met het boek van Freudenthal en Nijdam.
Op 27% van de scholen wordt niet meer dan 30 uur aan het keuzeonderwerp besteed.
Het gemiddelde gewicht van het keuzeonderwerp op het schoolonderzoek ligt in de buurt van 20.
De tijd die gemiddeld aan het keuzeonderwerp besteed wordt in klasse 5 verhoudt zich tot de tijd die er gemiddeld aan besteed wordt in klasse 6 ongeveer als 3 : 5.
Tot slot onze hartelijke dank aan het CITO voor de bereidwilligheid waarmee het meegewerkt heeft aan dit onderzoek.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Korrel

Een mens is nooit te oud om te leren

Nu dacht ik dat ik zo langzamerhand wel alle gedachtenkronkels had ontmoet, die leerlingen maar kunnen hebben. Dat was kennelijk niet juist gedacht. Mijn leerlinge moest het volgende probleem oplossen.



Bewijs in de hiernaast getekende figuur dat de oppervlakken van *ABD* en *ACD* zich verhouden als *BD* : *CD*.

Zij gebruikte daarvoor de volgende originele methode

$$\frac{O(\angle ABD)}{O(\angle ADC)} = \frac{BD}{DC}$$

Zij deelde keurig door *O* en door *A*; dat ook nog *D* had kunnen worden 'weggedeeld' was gezien het 'te bewijzen' niet opportuun.

Ik vrees dat ik haar niet heb kunnen overtuigen dat het antwoord goed was maar de methode niet. Misschien kan iemand er zijn voordeel mee doen. In elk geval is het een goed voorbeeld van de stelling 'Een goed antwoord betekent nog niet een goede oplossing'.

J. T. Groenman

Een probleem op het cirkelvormige biljart

PROF. DR O. BOTTEMA en DRS P. H. KRIJGSMAN

1 In dit tijdschrift heeft Mulder onlangs het volgende vraagstuk behandeld[1]). Op een cirkelvormig biljart zijn de punten A en B gegeven. Hoe moet men een punt uit A laten vertrekken opdat het na één terugkaatsing tegen de band door B zal gaan? De schrijver voert een van A en B afhankelijk assenstelsel in en leidt af dat het punt S waar de terugkaatsing plaats moet vinden een der vier snijpunten is van de cirkel met een zekere orthogonale hyperbool. De vraag in hoeverre die vier punten S reëel zijn blijkt niet eenvoudig te beantwoorden; de schrijver noemt het resultaat 'chaotisch' en beperkt zich tot een aantal numerieke voorbeelden.
2 Met alle waardering voor de auteur, aan wie wij een aantal wiskundige opgaven danken met een aantrekkelijke aan het dagelijkse leven ontleende inkleding, moet worden opgemerkt dat het hier gaat om een zeer oud en herhaaldelijk behandeld probleem. Als de eerste die er zich mee bezig hield wordt de Arabische wiskundige Alhazen (965–1038) vermeld, aan wie wij een geschrift over *optica* danken; de cirkel is bij hem geen biljartband maar een holle spiegel. In Chasles' *Aperçu historique*[2]) vindt men de namen van een aantal andere bekende mathematici die aan het vraagstuk aandacht hebben gegeven zoals Barrow, De l'Hôpital, Riccati, Simson en onze Huygens. De laatste bespreekt het enige malen in zijn correspondentie met De Sluze[3]).

3 Ook in meer recente tijd is het probleem herhaaldelijk behandeld. Dörrie heeft het opgenomen in zijn *Triumph der Mathematik*[4]) onder no. 40 (Alhazens Billiardaufgabe). De trefpunten S worden daar eveneens verkregen als snijpunten van de gegeven cirkel c met een orthogonale hyperbool h; deze methode berust blijkbaar op een natuurlijke gang der gedachte. Een discussie wordt in dit boek niet aangetroffen. Wel behandelt de schrijver het ook door Mulder beschouwde geval waarbij A en B evenver liggen van het middelpunt M van c; behalve de twee triviale punten S vindt hij een 'frappierende Lösung', nl. de snijpunten van c met de cirkel door A, B en M.

1) H. M. Mulder, *Biljarten op een rond biljart.* Euclides *52* (1976–77), 303–307.
2) M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837, [3]1889), Note 12, p. 498.
3) *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens* II (Den Haag, 1889), 45, 47.
4) H. Dörrie, *Triumph der Mathematik.* Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur. (Breslau, 1933), 196–200.

In een later boek[5]) komt Dörrie op het probleem terug. Hij geeft nu ook de discussie betreffende de realiteit der vier snijpunten S_i van c en h; een vergelijking van de vierde graad waarvan de wortels met S_i corresponderen wordt expliciet opgesteld en daar de term van de tweede graad daarin ontbreekt kan hij een door Legendre gegeven criterium toepassen. Het interessante resultaat luidt: van de snijpunten S_i zijn er minstens twee en soms vier reëel.

4 Ook hier te lande heeft het probleem van Alhazen de aandacht gehad en wel in een tweetal uitvoerige artikelen van S. C. van Veen[6]). Deze auteur beperkt zich niet tot een algebraïsche beschouwing maar stelt zich de meetkundige vraag of men bij gegeven c en gegeven punten A en B (die nu zelfs willekeurig in het vlak van c mogen liggen) de baan ASB kan *construeren*. Als positief resultaat vindt hij allereerst een vernuftige en betrekkelijk eenvoudige inschuifconstructie waarmee dat gelukt. Daarna bewijst hij de fundamentele stelling dat bij algemene gegevens een constructie met passer en liniaal onmogelijk is en wel door aan te tonen dat de vraag gelijkwaardig is met die naar de trisectie van een willekeurige hoek. Ten slotte geeft Van Veen een benaderingsconstructie voor het probleem met een grondige bespreking van de daarbij optredende maximale fout.

5 Men kan het probleem ook beschouwen van uit een wat ruimer standpunt door het punt B voorlopig weg te denken en de verzameling rechten V te bestuderen die ontstaat als de rechten door A een maal tegen de cirkel kaatsen. Interessant wordt dan de omhullende Γ van deze rechten die de (kata)kaustika heet van de lichtbron A t.o.v. de holle spiegel c. Achteraf kan dan de vraag worden gesteld welke (en hoeveel) raaklijnen aan Γ door een gegeven punt B gaan. De kromme Γ is zeer uitvoerig onderzocht door Cayley[7]); deze stelt de vraag nog algemener door ook breking der lichtstralen toe te laten, waarbij uiteraard de brekingsindex μ van belang is; voor de terugkaatsing geldt dan in het bijzonder $\mu = -1$. Cayley verwijst in zijn samenvattend en systematisch geschrift ook naar vroeger verricht onderzoek; hij noemt daarbij onder anderen Lagrange, Gergonne, Quetelet en Holditch wat nog eens bewijst hoezeer het probleem verscheidene eminente mathematici heeft weten te interesseren. Γ blijkt een kromme te zijn van de vierde klasse (wat wij boven reeds wisten) en van de zesde graad; zij is rationaal, heeft zes keerpunten, vier gewone dubbelpunten en geen buigpunten. Behalve algebraïsche onderzoekingen geeft Cayley ook een aantal figuren voor Γ (l.c. 362–363); de gedaante dezer kromme hangt uiteraard af van de ligging van A in de cirkel, dus van de parameter MA. Voor het bijzondere geval dat MA gelijk is aan de straal van c blijkt Γ een limaçon te zijn.
Hoewel het artikel van Cayley een volledige verhandeling bevat over de bedoelde kromme, noemen wij nog een veel later geschrift van Bromwich[8]) die de resultaten van zijn voorganger in compactere vorm weergeeft dank zij het gebruik van zogenaamde isotrope coördinaten (i.p.v. met de cartesiaanse x, y wordt ge-

5) H. Dörrie, *Kubische und biquadratische Gleichungen* (München, 1948), 115–118.
6) S. C. van Veen, *Een reflectieprobleem*. Mathematica (Zutphen) *A7*(1938–39), 279–285, *A8*(1938–39), 4–14.
7) A. Cayley, *A memoir upon caustics*. Phil. Trans. Royal Soc. London *147* (1857), 273–312 (= Collected mathematical papers II (Cambridge 1889), 336–380).
8) T. J. I'a Bromwich, *The caustic, by reflection, of a circle*. Amer. J. Math. *26*(1904), 33–44.

rekend met $X = x + iy$, $Y = x - iy$), een hulpmiddel dat ook bij bepaalde kinematische onderzoekingen vereenvoudigend werkt en dat hier te lande met name door Groenman[9]) herhaaldelijk met voordeel is benut.

6 Wij keren nu tot het oorspronkelijke vraagstuk terug en geven de volledige oplossing voor het bijzondere geval dat A en B op een middellijn van de cirkel liggen (één der voorbeelden van Mulder heeft op zo'n geval betrekking) en dat met elementaire middelen kan worden bedwongen.

Wij kiezen het rechthoekig assenstelsel OXY, met O in het middelpunt van c (met straal R) en A op de positieve X-as, dus $A = (a, 0)$ met $0 \leqq a \leqq R$. Is $S = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ een willekeurig punt op c, dan geldt voor het spiegelpunt A' van A in OS dat $A' = (a\cos 2\varphi, a\sin 2\varphi)$ en de vergelijking van SA' (dat is de door terugkaatsing van AS verkregen rechte) wordt

$$\sin\varphi(2a\cos\varphi - R)x + (-2a\cos^2\varphi + R\cos\varphi + a)y - aR\sin\varphi = 0 \quad (6.1)$$

of, als $\tan\frac{1}{2}\varphi = t$:

$$2t[(2a+R)t^2 - (2a-R)]x + [(R+a)t^4 - at^2 - (R-a)]y + 2aRt(1+t^2) = 0 \quad (6.2)$$

De verzameling V der teruggekaatste rechten is dus inderdaad van de vierde klasse; door elk punt (x_0, y_0) gaan vier der rechten, reëel of imaginair.

Is $B = (x_0, 0)$ dan zijn twee wortels van (6.2) resp. $t = \infty$ en $t = 0$; zij wijzen de uiteinden D_2 en D_1 van de middellijn door A en B aan, die inderdaad als mogelijke punten S konden worden verwacht. De twee overige wortels voldoen aan de vergelijking

$$t^2 = \frac{(2a - R)x_0 - aR}{(2a + R)x_0 + aR} \quad (6.3)$$

waaruit volgt dat er nog twee andere, niet triviale, ten opzichte van de X-as symmetrisch gelegen oplossingen zijn als het rechter lid van (6.3) positief is. Daarbij is $0 \leqq a \leqq R$ en $-R \leqq x_0 \leqq R$. Men verifieert gemakkelijk dat $t^2 < 0$ als $0 < x_0 \leqq R$, waaruit volgt dat B niet rechts van O kan liggen, wat trouwens ook uit de figuur onmiddellijk blijkt. Wij hebben dus $-R \leqq x_0 \leqq 0$.

Wij beschouwen het rechter lid van (6.3) als een functie van x_0 bij een vaste waarde van a. Het nulpunt van de noemer N is $q = \frac{-aR}{2a+R}$ en daar $q + \frac{R}{3} = \frac{R(R-a)}{3(2a+R)}$ heeft men $-\frac{R}{3} \leqq q \leqq 0$ voor elke waarde van a; de grenzen voor q worden resp. bereikt voor $a = R$ en voor $a = 0$. N is positief voor $x_0 > q$ en

[9]) J. T. Groenman, *Behandeling van de koppelkromme met behulp van isotrope coördinaten.* Diss. Delft (1950).

negatief voor $x_0 < q$. Het nulpunt van de teller T is $p = \dfrac{aR}{2a - R}$. Voor $a > \frac{1}{2}R$ is $p > 0$ en daar $p - R = \dfrac{R(R - a)}{2a - R}$ is in dit geval zelfs $p \geqq R$, en $T \leqq 0$ voor elke toegestane x_0. Voor $a = \frac{1}{2}R$ is $p = \infty$; voor $0 < a < \frac{1}{2}R$ is $p < 0$. Daar $p + R = \dfrac{R(3a - R)}{2a - R}$ heeft men $p < -R$ voor $a > \dfrac{R}{3}$ en $-R < p < 0$ voor $0 < a < \dfrac{R}{3}$. Uit dit alles blijkt dat voor A de posities $a = R, a = \frac{1}{2}R, a = \dfrac{R}{3}$ en $a = 0$ kritieke punten zijn, resp. aangegeven door D, F, G en O. Bij elke A behoort een interval op de X-as, links van O, waar B moet liggen om uit A langs een niet-triviale weg bereikt te kunnen worden. Wij krijgen de volgende resultaten; het eerste, derde en vijfde geval worden geïllustreerd met een figuur van Cayley (fig. 1, 2, 3):

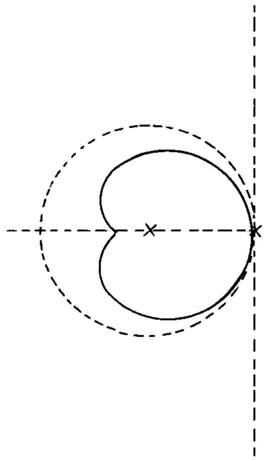


fig. 1 $a = R$

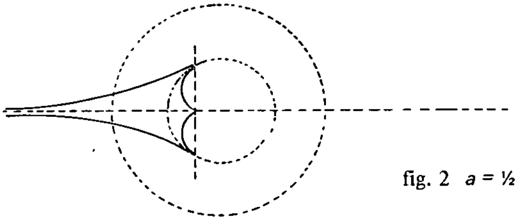


fig. 2 $a = \frac{1}{2}R$

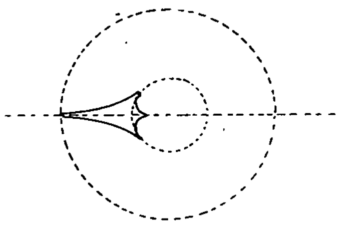


fig. 3 $a = \frac{1}{3}R$

A in D, $a = R\left(p = R, q = \dfrac{-R}{3}\right)$: $-R \leqq x_0 < \dfrac{-R}{3}$

A tussen F en D, $\frac{1}{2}R < a < R$ ($T < 0$, $N < 0$ voor $x_0 < q$):

$$-R \leqq x_0 < \frac{-aR}{2a + R} < \frac{-R}{4}$$

A in F, $a = \frac{1}{2}R\left(p = \infty, q = \dfrac{-R}{4}, T < 0, N < 0 \text{ voor } x_0 < q\right)$:

$$-R \leqq x_0 < \frac{-R}{4}$$

A tussen F en G, $\dfrac{R}{3} < a < \frac{1}{2}R$ ($p < -R$, $T < 0$, $N < 0$ voor $x_0 < q$):

$$-R \leqq x_0 < \frac{-aR}{2a + R} < \frac{-R}{5}$$

A in G, $a = \dfrac{R}{3}\left(p = -R, q = \dfrac{-R}{5}, T \leqq 0, N < 0 \text{ voor } x_0 < q\right)$:

$$-R < x_0 < \frac{-R}{5}$$

A tussen G en O, $0 < a < \dfrac{R}{3}$ ($-R < p < 0$, $p < q$):

$$-R < \frac{aR}{2a - R} < x_0 < \frac{-aR}{2a + R}$$

A in O: $x_0 = 0$

In het numerieke voorbeeld van Mulder is, met onze notatie, $a = \dfrac{2R}{5}$, $x_0 = \dfrac{-4R}{5}$; A ligt tussen F en G; er zijn twee niet-triviale oplossingen want $-R \leqq \dfrac{-4R}{5} < \dfrac{-2R}{9}$. Men vindt met (6,3) dat $t^2 = \dfrac{3}{13}$, wat overeenstemt met het t.a.p. gegeven antwoord.

Men kan het beperkte vraagstuk (A en B op eenzelfde middellijn) ook wel met (6.1) behandelen, die voor $y = 0$, $\sin\varphi \neq 0$ overgaat in

$$\cos\varphi = \frac{(a + x_0)R}{2ax_0} \tag{6.4}$$

zodat de ongelijkheden $-1 \leqq \dfrac{(a + x_0)R}{2ax_0} \leqq 1$, gecombineerd met $0 \leqq a \leqq R$ en $-R \leqq x_0 \leqq R$ moeten worden beschouwd.

7 Er is uiteraard verband tussen de gang van zaken op een cirkelvormig biljart en de beeldvorming bij een holle spiegel. In de elementaire optiek bepaalt

men zich tot een cirkelboog met kleine middelpuntshoek. Benadert men in (6.4) cos φ door de waarde 1, dan ontstaat tussen a en x_0 de relatie $\frac{1}{a} + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{R}$, die voor $a = R - v$, $x_0 = R - b$ overgaat in de bekende formule $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}$.

Boekbespreking

SMP Supplementary Booklet One – Five, Cambridge University Press 1977, VI + resp. 84, 101, 83, 131, 85 blz., £0.95 per deel.

Door de gebruikers van de SMP-boeken voor O level of voor examen op lager niveau is de behoefte gevoeld aan extra oefenmateriaal. Dit vijftal boeken is geschreven om aan dat verlangen tegemoet te komen.
One heeft betrekking op de boeken 1, A en B
Two heeft betrekking op de boeken 2, C en D
Three heeft betrekking op de boeken 3, E en F
Four heeft betrekking op de boeken 4, G, H en X
Five heeft betrekking op de boeken 5, Y en Z
(A–H zijn bestemd voor de comprehensive school, 1–5 voor O level, X–Z bevatten de aanvulling voor gebruikers van A–H die door willen gaan voor O level.)
Ik heb de boeken doorgebladerd. Ze bevatten inderdaad een grote hoeveelheid materiaal om technisch rekenwerk goed onder de knie te krijgen. Verder veel praktische problemen. In book Four vond ik ook opgaven die wat leuker waren.
Zonder enige twijfel is de uitgave zeer nuttig. De schrijvers hebben nadrukkelijk vermeld dat het niet de bedoeling is dat deze vraagstukkenboeken geheel doorgewerkt worden. Men kan naar behoefte eruit kiezen. En eventueel de boeken gebruiken om sommige onderwerpen grondiger te behandelen en dan andere te laten schieten.
Achterin elk deel staan de antwoorden.

P. G. J. Vredenduin

SMP Further Mathematics Series I, *Linear Algebra and Geometry* (draft edition), XI + 152 blz., Cambridge University Press 1970, £1.90.

In een inleiding worden kort enkele hoofdtrekken van de mathematische methode uiteengezet. Het meest belangrijke is hierbij het vastleggen van een structuur door middel van een aantal axioma's. Dit als directe voorbereiding voor de invoering van het vectorbegrip. Op de gebruikelijke wijze wordt de lineaire ruimte axiomatisch gefundeerd. De begrippen basis en dimensie worden besproken.
Hierna volgen de lineaire transformaties. De grondstelling over de dimensie van kern en beeldruimte wordt afgeleid. Gebruik wordt gemaakt van matrices. Deze worden in kanonieke gedaante gebracht:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & . & 0 & \\ 0 & 1 & . & 0 & D \\ . & . & . & . & \\ 0 & 0 & . & 1 & \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{0} & 0 \end{array}\right)$$

De dimensie van de beeldruimte leest men hieruit af. Parallel hiermee een theorie van het oplossen van homogene en niet-homogene eerstegraadsvergelijkingen.
Nu de meetkunde. Eerst de affiene meetkunde in het vlak en in de ruimte. Daarna de projectieve meetkunde, waarin een punt correspondeert met een lineaire deelruimte. Met behulp van projectieve meetkunde worden de stellingen van Pappus en Desargues afgeleid en de eigenschappen van een harmonische vierhoek. Ten slotte het inprodukt en de euclidische meetkunde en nog een tweetal aardige voorbeelden van eindige meetkunden. In dit hoofdstuk worden een aantal essentiële dingen op elegante en gemakkelijke wijze afgeleid.
In een uitvoerig hoofdstuk komen de eigenwaarden ter sprake en hun betekenis bij het klassificeren van tweedegraads krommen en oppervlakken met middelpunt.
Ten slotte een hoofdstuk getiteld transformatiemeetkunde. Hierin wordt in kort bestek uiteengezet welke isometrieën er zijn in het platte vlak en welke isometrieën met dekpunt in de ruimte.

P. G. J. Vredenduin

SMP Further Mathematics Series II, *Vectors and Mechanics* (draft edition), Cambridge University Press 1971, £1.90, IX + 158 blz.

De SMP hecht grote waarde aan de betekenis die de wiskunde voor de maatschappij heeft. In dit boek staat de toepassing van de wiskunde dan ook centraal. Het hoofdthema is de mechanica. De beweging van een satelliet om de aarde is daarbij een dankbaar onderwerp om de mechanische theorieën aan op te hangen.
Hoofdstuk 1 gaat over krommen. Enkele grondbegrippen uit de differentiaalmeetkunde komen ter sprake, zoals kromtecirkel en kromtestraal, lengte van een kromme, involvente en evolvente. Enkele krommen worden onderzocht: de trochoïde, de cycloïde, de spiraal en de kettinglijn. Snelheid en versnelling van een stoffelijk punt bij beweging langs een kromme komen ter sprake.
In hoofdstuk 2 komt het probleem van de satelliet naar voren. Voorlopig is hij nog puntvormig. Dit brengt ons ertoe de beweging van een stoffelijk punt in een centraal krachtenveld te onderzoeken. Als de toepassingen er aanleiding toe geven, wordt in dit boek ook wiskunde bedreven. Zo is hier aanleiding tot een nader onderzoek van de kegelsneden, uitgaande van brandpunt en richtlijn.
Maar een satelliet is niet puntvormig. Behalve een voortstuwende kracht kunnen er dus ook krachten op werken die rotaties veroorzaken. Zo komt men in hoofdstuk 3 ertoe momenten te beschouwen en het ligt voor de hand nu het uitwendig vectorprodukt te definiëren. Weer is hier reden aan wiskunde te gaan doen. Gedemonstreerd wordt dat het uitwendig produkt in de vectormeetkunde goed gebruikt kan worden om berekeningen te vereenvoudigen. Waarna we weer naar het satellietprobleem terugkeren.
Ten slotte gaat hoofdstuk 4 over de mechanica van de vaste lichamen. Onder meer komen daarbij ter sprake: zwaartepunt, beweging ten opzichte van het zwaartepunt, traagheidsmoment, impulsmoment, kinetische energie.
Een degelijk boek, waarin veel gerekend wordt.

P. G. J. Vredenduin

Jahrbuch Uberblicke Mathematik 1977 (herausgegeben von B. Fuchssteiner, U. Kulisch, D. Laugwitz, R. Liedl), B.I. – Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1977, 180 p., DM 28.

Evenals in de voorgaande jaren bevat dit boekje voor 1977 overzichtsartikelen over zuivere en toegepaste wiskunde en over wiskunde-onderwijs in de middelbare scholen. Wat betreft de zuivere wiskunde vindt men artikelen over logica (vrijheid van tegenspraak en onafhankelijkheid bij axiomastelsels), spectraaltheorie in ruimten van Hilbert, abstracte algebra en konstruktieve functionaalanalyse. De toegepaste wiskunde is vertegenwoordigd met sturingstheorie (van technische en economische processen), perfecte codes, speltheorie en de (in de technische wetenschappen wel gebruikte) methode der 'eindige elementen' bij partiële differentiaalvergelijkingen. De meer op de school gerichte artikelen gaan over het onderwijs in de

informatica en over het gebruik van computers bij het onderwijs. Verder bevat het boekje nog kortere berichten over een internationaal congres over wiskunde-onderwijs in Karlsruhe, over Gauss (die in 1777 geboren werd) en over het recente bewijs (1976) door K. Appel en W. Haken dat het vier-kleuren vermoeden inderdaad juist is (bij het kleuren van een kaart in een atlas zijn niet meer dan vier kleuren nodig).
A. C. Zaanen

R. Lidl, *Algebra für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, Sammlung Göschen, Band 2120; Walter de Gruyter, Berlin, 1975, DM 19.80.

In deze inleiding ligt de nadruk op de toepassingsmogelijkheden van algebraïsche grondbegrippen in de biologie (genetica), de theorie van de automaten en half-automaten, de coderingstheorie, de theorie van de schakelingen en de symbolische logica. De auteur is er in geslaagd om een duidelijke uiteenzetting van de stof te geven zonder veel concessies aan de exactheid van behandeling te doen.
In het eerste en tweede hoofdstuk wordt een aantal grondbegrippen uit de algebra gedefinieerd en worden later benodigde stellingen geformuleerd en zo veel mogelijk bewezen.
Hoewel de schrijver meent dat iedere student met mathematische belangstelling deze hoofdstukken zonder bijzondere voorkennis (behalve die welke bij het voorbereidend onderwijs is verkregen) kan volgen, is het de vraag of dit niet te optimistisch is. In ieder geval is dit deel door de opeenstapeling van definities (weliswaar hier en daar onderbroken door voorbeelden) het minst aantrekkelijke, hoewel onmisbare, deel van deze monografie, in het bijzonder voor lezers die nog niet thuis zijn in de abstracties van de wiskunde.
Overigens doet deze opmerking weinig af aan mijn waardering voor dit boekje dat de betekenis van de algebra voor allerlei gebieden buiten de zuivere wiskunde duidelijk maakt.

W. J. Claas sr.

A. R. Mitchell and R. Wait, *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*, Wiley - Interscience, New York - London 1977, x + 198 blz., £ 6.95.

De Finite Element Method is een methode om een benadering te vinden van een gezochte functie, bv. de oplossing van een differentiaalvergelijking, op een zeker gebied. Men deelt bij deze methode het gebied op in een eindig aantal eenvoudige deelgebieden (elementen), en construeert bij elk element een eenvoudige 'basisfunctie', die slechts ongelijk aan nul is binnen dit element en (eventueel) zijn naaste buren. Men zoekt dan een lineaire combinatie van deze basisfuncties die de gezochte functie in zekere zin zo goed mogelijk benadert.
In dit boek worden een aantal varianten van deze methode beschreven (o.m. de methodes van Ritz, Kantorovich en Galerkin). Voorbeelden van vele geschikte basisfuncties bij verschillende soorten elementen worden uitgewerkt. Het boek is vooral geschreven voor hen die in de praktijk deze methoden kunnen gebruiken om partiële differentiaalvergelijkingen numeriek op te lossen. Hier en daar wordt enige functionaalanalyse als theoretische achtergrond genoemd en gebruikt, naar de auteurs zeggen, 'mainly from the point of view of unifying material'. Helaas bevat de introductie over functieruimten (blz. 12 e.v.) vele onnauwkeurigheden en fouten. Het ware beter geweest indien de auteurs op de plaatsen waar zij technieken uit de functionaalanalyse gebruiken, hadden volstaan met een literatuurverwijzing.

J. van de Craats.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin. Dillenburg 148, Doorwerth.

Opgaven

377. Construeer alle niet-isomorfe grafen die bestaan uit 8 punten en 12 verbindingslijnstukken waarbij uit elk punt 3 lijnstukken vertrekken. (Twee grafen zijn isomorf als er een bijectie tussen de punten bestaat die door een lijnstuk verbonden punten toevoegt aan door een lijnstuk verbonden punten.)
Welke van deze grafen kan men zo tekenen dat geen twee lijnstukken elkaar snijden?
Welke van deze grafen zijn isomorf met de hoekpunten en ribben van een veelvlak?

378.

a $1 + 9 + 7 + 8 = a + b + c + d$
$1^2 + 9^2 + 7^2 + 8^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
$a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$
Bereken a, b, c en d.

b $a + b + c = 1978$
$a^2 + b^2 = c^2$
$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$
Bereken a, b en c.

c $197x^2 + 197y^2 + 1977^2 = 197u^2 + 197v^2 + 1978^2$
x, y, u en v stellen cijfers voor.
Bereken x, y, u en v.

En hiermee wenst de heer B. Kootstra onze lezers een driewerf gelukkig nieuwjaar.

Oplossingen

Voor de opgaven zie het vorige nummer.

375. Een leerling beweert 50 keer met een munt gegooid te hebben en de volgende serie uitslagen gekregen te hebben:
10101101001011000101100101011000101010011001010100
Waarom gelooft de leraar niet dat de leerling echt gegooid heeft?
In de serie komt het 35 keer voor, dat een cijfer opgevolgd wordt door een daarvan verschillend cijfer. De kans dat een 0 door een 1 opgevolgd wordt of omgekeerd, is $\frac{1}{2}$. Er zijn 49 overgangen van een cijfer op een volgend cijfer. De verwachting voor het aantal keren dat een cijfer door een daarvan verschillend gevolgd wordt, is daarom 24,5. De standaarddeviatie is $\sigma = \sqrt{49 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 3{,}5$. De afwijking $35 - 24{,}5$ is gelijk aan 3σ. Dit maakt het uitermate onwaarschijnlijk dat de serie eerlijk geproduceerd is. De kans hierop is 0,00135.

376. Matthaeus, Marcus en Lucas worden ter dood veroordeeld, maar één van hen krijgt genade. Ze weten niet wie. Matthaeus zegt tegen de bewaker: Eén van de twee, Marcus en Lucas, wordt zeker ter dood veroordeeld. Je verraadt mij dus niets als je mij één man noemt, Marcus of Lucas, die ter dood gebracht wordt. De bewaker noemt Marcus. Matthaeus zegt nu: één van de twee, Lucas of ik, krijgt genade. De kans dat ik het ben, is dus $\frac{1}{2}$. Heeft hij gelijk?
De oplossing berust op het theorema van Bayes. Voor alle zekerheid even repeteren in een eenvoudig geval. Men heeft vier urnen A, B, C en D. Men kiest eerst een urn. De vier urnen hebben gelijke kans gekozen te worden. Uit de gekozen urn trekt men een knikker. De kans dat deze knikker rood is, is voor de vier urnen resp. $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$. Vgl. fig. 1.

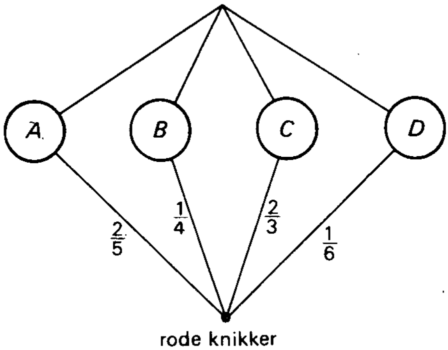


Fig. 1

De getrokken knikker is rood. Wat is nu de kans dat deze knikker getrokken is uit urn B? Het theorema van Bayes zegt, dat deze kans is

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}$$

De kansen dat Matthaeus, Marcus en Lucas genade krijgen, zijn a priori gelijk. De bewaker zegt: Marcus wordt ter dood gebracht. En nu vragen we op grond van dit gegeven de kans te bepalen, dat Matthaeus genade krijgt. Het schema is thans

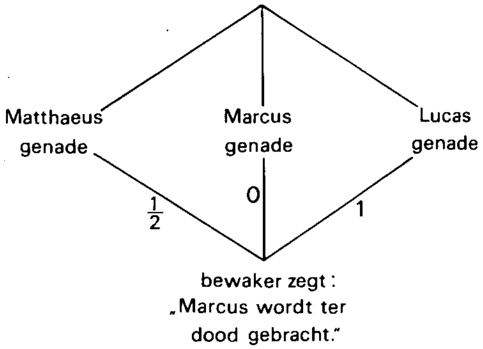


Fig. 2

Het theorema van Bayes zegt nu, dat de kans dat Matthaeus genade krijgt, gelijk is aan

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+0+1}=\frac{1}{3}$$

Matthaeus had dus ongelijk. Zijn kans op genade is onveranderd $\frac{1}{3}$.

Mededelingen

Jubileumcongres van het Wiskundig Genootschap op 29, 30 en 31 maart 1978 ter gelegenheid van het 200-jarig bestaan

ONTWERP PROGRAMMA JUBILEUMCONGRES WG – 1978, 29/30/31 MAART

WOENSDAG, 29 maart 1978

9.00–10.00 Koffie; Registratie en afhalen congresbescheiden
10.00–10.15 OPENING
10.15–11.00 FEESTREDE door de Voorzitter WG, FREUDENTHAL
11.00–11.30 Speeches en gelukwensen door diverse genodigden

KORTE PAUZE

11.45–12.45 SEIDEL: *De Vijfhoek*
12.45–14.00 LUNCHPAUZE

14.00–14.30 (IOWO)	14.00–14.30 SECTIES (niet specifiek
14.30–15.00 (CITO) *Toetsen – vroeger en nu*	14.30–15.00 voor leraren)

THEEPAUZE

15.30–16.30 Voordracht over de GESCHIEDENIS VAN DE WISKUNDE
BUSVERVOER NAAR EXPOSITIE/RECEPTIE
17.30–19.30 RECEPTIE in het Maagdenhuis, aangeboden door het Gemeentebestuur
EXPOSITIE in de Universiteitsbibliotheek (open tot 20.30 uur)

DONDERDAG, 30 maart 1978

9.30–10.30 KUIPER

KOFFIEPAUZE

	Geschiedenis	Informatica	Besliskunde/ Waarsch. rekening	SECTIES*)
11.00–11.40		v. WIJNGAARDEN	HORDIJK	11.00–11.30
11.50–12.30	v. STIGT	DIJKSTRA	RUNNENBURG	11.30–12.00
				12.00–12.30

12.30–14.00 LUNCHPAUZE

	Statistiek/ Econometrie	Numerieke Wiskunde	Eindige wiskunde	SECTIES
14.00–14.40	HEMELRIJK	v.d. SLUIS	TIJDEMAN	14.00–14.30
14.50–15.30	CRAMER	SPIJKER	HIGMAN	14.30–15.00
				15.00–15.30

THEEPAUZE

16.00–16.45 Voordracht door VAN EST over het werk van de ontvanger van de BROUWER-MEDAILLE, A. BOREL

*) In ieder geval zal een sectie *Didactiek van de wiskunde* worden georganiseerd. Reeds toegezegd is een voordracht van VAN DORMOLEN.

16.45–17.30 Voordracht door A. BOREL
17.30–19.00 RECEPTIE voor de BROUWER-LAUREAAT in de VU
19.00–20.00 Gelegenheid tot nuttigen van een eenvoudige maaltijd in VU-restaurant
20.00–..... AVONDPROGRAMMA ('Vóór leden, dóór leden')

VRIJDAG, 31 maart 1978

	Algebra/ Meetkunde	Analyse (I)		
9.00– 9.40	H. W. LENTRA jr.	PELETIER	9.00– 9.30	SECTIES
9.50–10.30	TAKENS	BRAAKSMA	9.30–10.00	
			10.00–10.30	

KOFFIEPAUZE

11.00–12.30 JAARVERGADERING
12.30–14.00 LUNCHPAUZE

	Logica	Analyse (II)	Algebraïsche topologie		
14.00–14.40	v. DALEN	KAASHOEK	VARMA	14.00–14.30	SECTIES
14.50–15.30	DILLER	THOMAS	LOOYENGA	14.30–15.00	
				15.00–15.30	

THEEPAUZE

16.00–16.55 SLOTVOORDRACHT: DUISTERMAAT
16.55 SLUITING

Opmerkingen bij het ontwerp-programma
Het is vanaf het begin de bedoeling geweest dat met name de eerste twee dagen van het congres meer dan gewoonlijk rekening gehouden wordt met de belangstelling van de *leraren* onder onze leden. Vanuit die gedachte heeft Prof. SEIDEL het onderwerp *De Vijfhoek* gekozen voor zijn plenaire voordracht op woensdagmorgen; deze voordracht, waarin de vijfhoek te maken blijkt te hebben met matrices, codering, beschrijvende meetkunde, stereometrie, kristallografie, grafen, permutatiegroepen, trigonometrie en mechanica, zal ongetwijfeld ook voor de andere congresgangers onverwachte perspectieven openen.
In het middagprogramma van de eerste congresdag wordt een deel van de activiteiten verzorgd door het IOWO te Utrecht en het CITO te Arnhem (naast sectievoordrachten van technisch-wiskundige aard), terwijl de *Geschiedenis van de Wiskunde* benadrukt wordt (uiteraard, op een tweede eeuwfeest!) door een plenaire voordracht en een expositie.
Ook op de tweede congresdag krijgen de leraren ruime aandacht, terwijl opnieuw de geschiedenis van de wiskunde aan de orde wordt gesteld.
De Brouwer Memorial Lecture en, daaraan verbonden, de uitreiking van de Brouwer medaille, op donderdagmiddag, herinneren ook aan het (recente) verleden.
Voor het overige spreekt het conceptprogramma voor zich zelf. Als u nog suggesties heeft, of wel kritiek (liefst opbouwende), dan vernemen we dat graag van u.
Ook leraren die geen lid van het Wiskundig Genootschap zijn, kunnen aan het congres deelnemen.

Wintersymposium Wiskundig Genoorschap

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op zaterdag *7 januari 1978* in het gebouw van de Rijks Scholengemeenschap, Jezuïetenstraat te Roermond.
Als thema is gekozen: Statistiek en Waarschijnlijkheidsrekening.
Het programma luidt als volgt:
10.00–10.30 uur Aankomst en koffie.
10.30–11.30 uur Drs. A. J. Bosch: Lineaire algebra in de statistiek.
11.45–12.45 uur Dr. Ir. J. H. A. de Smit: Stochastische processen in de operationele research.
14.00–15.00 uur Prof. dr. C. L. Scheffer: Eenvoudige roostermodellen in de statistische mechanica.

Ofschoon deze bijeenkomst in de eerste plaats bestemd is voor leraren, zijn alle overige belangstellenden eveneens van harte welkom. Ieder die deze bijeenkomst wenst bij te wonen wordt verzocht hiervan zo spoedig mogelijk bericht te geven aan J. Amkreuts, Jan van Abroeckstraat 6 te Sint Odilieberg (telefoon 04752–1503) en tevens te vermelden of hij aan de gezamenlijke lunch wenst deel te nemen. De kosten voor de lunch ten bedrage van *f* 8,50 gelieve men te storten op postrekening 928210 t.n.v. J. Amkreuts te Sint Odilieberg, onder vermelding van 'Wintersymposium Wiskundig Genootschap', of ter plaatse te voldoen. Voor deelname aan de lunch is opgave tevoren *noodzakelijk.*
De school is te voet van station in 5 à 10 minuten te bereiken. Na verlaten van het station steke men het stationsplein over en houde men links aan. Via de Hamstraat en de Pollaerdstraat bereikt men dan de Lindanusstraat (deze straten liggen in elkaars verlengde). In de Lindanusstraat ziet men links de ingang van de school.

VVWL-studiedag 28 januari 1978 Universitaire Instelling Antwerpen

De V.V.W.L. houdt *op zaterdag 28 januari 1978* een studiedag in de AULA MAJOR van de Universitaire Instelling Antwerpen (adres: Universiteitsplein 1, 2610 WILRIJK).
Thema: Organigrammen in het wiskundeonderwijs

AGENDA
9.30 uur ontvangst
10.00 uur opening door voorzitter Frank LAFORCE
10.05 uur inleiding door prof. Fred VERMANDEL (Universitaire Instelling Antwerpen)
10.15 uur spreekbeurt door Henk OLIVIE, leraar aan het Stedelijk Hoger Instituut voor Technische Studiën Antwerpen: *Organigrammen in het wiskundeonderwijs*
11.15 uur koffiepauze
11.30 uur spreekbeurt door André BERCKMOES, leraar aan het Sint-Amandscollege Gent: *Organigrammen in het wiskundeonderwijs*
12.30 uur vragen en discussie
13.00 uur sluiting

Bericht voor de treinreizigers: aan het Antwerps Centraalstation neemt u de autobus 17 *met bestemming universiteit.*

Leden van de N.V.v.W. zijn welkom.

Jaarvergadering van de VVWL, 25 februari 1978 Nieuwe campus van de Vrije Universiteit Brussel

De jaarvergadering van de V.V.W.L. vindt plaats *op zaterdag 25 februari 1978* op de nieuwe campus van de Vrije Universiteit Brussel (adres: Pleinlaan 2, 1050 BRUSSEL), gelegen aan het spoorwegstation van Etterbeek.

AGENDA
9.30 uur ontvangst met koffie in lokaal G 019
10.10 uur opening door voorzitter Frank LAFORCE in lokaal G 110
10.15 uur prof. dr. G. VAN STEENKISTE (Rijksuniversiteit Gent): *Mathematische modellen en simulatie, sleutel voor een doelbewuste controle*
11.15 uur pauze
11.30 uur prof. dr. F. DELBAEN (Vrije Universiteit Brussel): *Mathematische beschrijving van input-outputmodellen, toepassing van de algebra*
12.45 uur lunch
14.30 uur dr. F. CNOP-GRANSARD (Vrije Universiteit Brussel): *Inhaalonderwijs in de wiskunde door middel van computer managed instruction*
15.30 uur koffiepauze
16.00 uur *algemene vergadering van de V.V.W.L.*, in lokaal G 110
1. opening door de voorzitter;
2. jaarverslagen;
3. verslag van de kascommissie en décharge van de penningmeester;
4. bestuursverkiezing;
5. rondvraag
6. sluiting.

Wie aan de gemeenschappelijke lunch in het restaurant van de Vrije Universiteit Brussel deel wil nemen, kan zich daarvoor tijdens de ochtendzitting aanmelden.

De deelnemers die met de auto komen, kunnen de VUB-campus oprijden langs P3 of T2 en parkeren onder de gebouwen F en G.

De treinreizigers kunnen tot in het station van Etterbeek rijden; de volgende trein is daartoe zeer geschikt: Brussel-Zuid, 9.20 — Brussel-Centraal, 9.25 — Brussel-Noord, 9.29 — Schuman 9.36 — Leopoldswijk, 9.38 — Etterbeek, 9.42.

Leden van de N.V.v.W. zijn welkom.

INHOUD:

ADRESSEN AUTEURS:

Kees van Baalen, Durgerdam 40, Durgerdam.

Prof. Dr. O. Bottema, Ch. de Bourbonstraat 2, Delft.

W. Ganzevoort, Barbierstraat 93, Gorinchem.

Fred Groffree, Bremlaan 16, Den Dolder.

J. T. Groenman, Goeman Borgesiuslaan 8, Groningen.

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.